Thermal Physics & Kinetic Theory of Gases

Notes

Abhishek Bohare

a_bohare@icloud.com

typeset with LaTeX

THERMAL Physics

INDEX

- Kinetic Theory of Gases
- Radiation
- Statistical Physics
- Heat and Thermodynamics
- Behaviour of Real Gas
- Foundation Thermo

Contact No. ⇒ +919690434694
Email Address ⇒ dreamboy.abhishek425@gmail.com
abhi.idfec2017@iitr.ac.in

ABHISHEK BOHARE

Kinetic Theory of gases

$P = \frac{F}{A}$ N/m²

Question- आदर्श गैस के लिए Kinetic Theory की Assumption बताइए तथा show कीजिए कि आदर्श गैस के द्वारा लगाया जाने वाला दाब प्रति एकांक आयतन के लिए गतिज ऊर्जा का 2/3 होता है।

• KINETIC THEORY OF GASES -

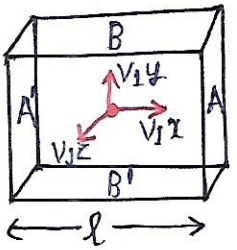
जब Perfect Gas का निश्चित द्रव्यमान एक एक बर्तन में बंद होता है तो Gas के molecules दीवारों से लगातार टकराते रहते है और इसके पश्चात वापस आते है। जब molecules टकराते है तो इसके momentum में change होता है। Newton के IInd Law के अनुसार संवेग परिवर्तन की दर Molecules द्वारा लगने वाले बल के बराबर होती है और प्रति एकांक क्षेत्रफल पर कार्य करने वाला बल, दाब कहलाता है।

Gas के द्वारा लगाये गये Pressure के लिए निम्न Assumption दी गयी।

1. Gas के Molecules कठोर (Hard), चिकने (smooth) तथा spherical होते है।
2. दो लगातार collisions के बीच लिये गये समय, की तुलना में Molecules के Collision का समय नगण्य होता है।
3. Molcules का Moleculesके साथ तथा दीवार के साथ होने वाला Collision Perfectly Elastic होता है।
4. Molecules केवल संघट्ट के समय ही एक-दूसरे पर force Apply करते है। तथा Molecules की total energy, Kinetic होती है।
5. Molecules बहुत सूक्ष्म आकार के होते है अत: इनका Volume Gas के Volume की तुलना में नगण्य होता है।
6. Gas के Molecules के बीच अतरांणविक दूरी बहुत अधिक होती है इसीलिए Gas में Molecules की गति के लिए Liquid तथा solid की तुलना में अधिक space होता है।

• Expression for Pressure -

माना आदर्श गैस का निश्चित mass एक घनाकार Vessel में भरा है। माना इसका द्रव्यमान M व molecules की संख्या n है। माना प्रत्येक Molecule का द्रव्यमान m है। हम जानते है Gas के Molecules सभी दिशाओं में गति करते है। तब इनके वेग के घटक प्रत्येक दिशा में होंगे।



VESSEL - बंद बर्तन

हम एक Molecule के motion को consider करते है। माना इसका वेग v_i है तब

$$v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2$$

हम जानते है Molecules का Collision Elastic है। इस कारण यह एक ही face पर दो क्रमागत: collision में समान वेग से टकराता है। इस प्रकार से face A पर टकराने से पहले Particle का Momentum = mv_{1x}

तथा face A पर Collision के पश्चात momentum = $-mv_{1x}$

इस प्रकार से A की face पर क्रमागत Collision में momentum में change

$$= mv_{1x} - (-mv_{1x})$$

$$= 2mv_{1x}$$

एक ही face पर एक second में क्रमागत Collision की संख्या = $\frac{v_{1x}}{2l}$

इस प्रकार face A पर क्रमागत Collision के कारण 1 second में momentum में change = $2mv_{1x} \times \frac{v_{1x}}{2l}$

$$= \frac{mv_{1x}^2}{l}$$

माना Gas में n molecules के वेग $v_{1x}, v_{2x}, v_{3x} \ldots\ldots v_{nx}$ है। यह molecules के x दिशा में वेग है क्योंकि molecules की total energy Kinetic Energy है तब सभी molecules के लिए x दिशा में momentum में change

$$= \frac{mv_{1x}^2}{l} + \frac{mv_{2x}^2}{l} + \frac{mv_{3x}^2}{l} + \ldots\ldots + \frac{mv_{nx}^2}{l}$$

$$= \frac{m}{l} \sum_{i=1}^{n} v_i^2 x$$

हम जानते है Rate of change of momentum force (F) के Equal होता है तब A face पर x दिशा में Pressure

$$P_x = \frac{m}{l \times l^2} \sum_{i=1}^{n} v_i^2 x$$

$$P_x = \frac{m}{l^3} \sum_{i=1}^{n} v_{ix}^2$$

$$P_x = \frac{m}{V} \sum_{i=1}^{n} v_{ix}^2 \qquad \text{Whenever } l^3 = V, \text{ is Volume of Gas.}$$

Thus

$$P_y = \frac{m}{V}\sum_{i=1}^{n} v_{1y}^2$$

$$P_z = \frac{m}{V}\sum_{i=1}^{n} v_{1z}^2$$

तब total Pressure $P = P_x + P_y + P_z = \frac{m}{V}\sum_{i=1}^{n} v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2$

यदि Box का size काफी small है तो

$$P = P_x = P_y = P_z$$

अत:

$$3P = \frac{m}{V}\sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

हम जानते है molecules की mean square speeds

$$\overline{v^2} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \ldots + v_n^2}{n}$$

$$\overline{v^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = n\vec{v^2}$$

Then

$$3P = \frac{m}{V}(n\vec{v^2})$$

तब

$$P = \frac{(nm)}{3V}(\vec{v^2})$$

$$P = \frac{1}{3}\rho\overline{v^2} \qquad \left[\because \frac{M}{V} = \rho \text{ [mass density] and } M = nm\right]$$

$$P = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\rho\overline{v^2}\right)$$

$$\boxed{P = \frac{2}{3}E}$$

यहाँ $E = \frac{1}{2}\rho\bar{v}^2$, Average Kinetic Energy है।

Question- Gases की Kinetic Theory के आधार पर temp. की व्याख्या कीजिए। तथा Gas में प्रति Molecule के लिए स्थानान्तरण की गतिज ऊर्जा का मान प्राप्त कीजिए।

Maxwell की Theory के अनुसार Ideal Gas में Molecules के स्थानान्तरण की औसत गतिज ऊर्जा, परमताप के समानुपाती होती है।
माना परमताप T पर Gas के लिए 1 gms. mole Considor करते है। माना इसका Volume V है। Ideal Gas की Kinetic Theory के अनुसार Ideal Gas द्वारा लगाया जाने वाला दाब

$$P = \frac{1}{3}\rho\bar{v}^2$$

तथा Gas की density

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Nm}{V}$$

इस प्रकार

$$P = \frac{1}{3}\cdot\frac{Nm}{V}\bar{v}^2 \qquad [N \text{ is Avogadro's No.}]$$

$$PV = \frac{1}{3}Nm\bar{v}^2$$

अब Gas की 1 mole के लिए $PV = RT$

अत:

$$RT = \frac{1}{3}Nm\bar{v}^2$$

इस प्रकार

$$\left(\frac{1}{2}\cdot m\bar{v}^2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{R}{N}\right)T$$

$\frac{R}{N} = K$, Boltzman Constant है।

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}KT \quad \text{——— (1)}$$

यह Ideal Gas के molecules के लिए Avarage Kinetic Energy है जो कि Absolute temp. के समानुपाती होती है।
पुन: समी० (1) से

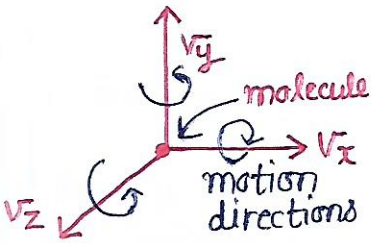
$$\bar{v}^2 = \frac{3KT}{m}$$

यहाँ $T = 0$ पर, $\bar{v}^2 = 0$

$$v_{rms} = \sqrt{\bar{v}^2}$$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$$

$$\boxed{v_{rms} \propto \sqrt{T}}$$



Question- Degree's of Freedom क्या हैं?

एक Particle के लिए degree of freedom Motions की वह संख्या है जिनके लिए वह Partide स्वतंत्र है या Independent Methods की वह संख्या जिनमें यह ऊर्जा का आदान-प्रदान कर सकता है या Co-ordinate की वह संख्या जो Molecule की dynamic Position को Explain करने में Helpful हो।

• MONOATOMIC GAS- जैसे monoatomic Gas ; हीलियम (Hi), Argon (Ar) आदि में केवल एक Atom होता है। इस प्रकार से इन molecules को space में एक Point द्वारा दर्शाया जा सकता है अर्थात इसमें स्थानान्तरिय गति होगी होगी जो space में किसी भी direction में हो सकती है तब इस motion को किसी भी दिशा के अनुदिश या समान्तर बताया जा सकता है। इस प्रकार से Particle के motion को तीन Independent परत पर लम्बवत् अक्षों के अनुदिश बताया जा सकता है अत: Monotonic Gases के लिए degree of freedom 3 होगें।

• DIATOMIC GAS- Diatomic Gas के Molecule में 2 Atoms होते है तथा यह एक दूसरे से दृढ़ता से जुड़े होते हैं। इस प्रकार के Molecules में स्थानान्तरिय (दिशा) गति के साथ तीन(direction)दिशाओं में किसी एक के परित: Rotate कर सकते हैं। इस प्रकार di-atomic के लिए दो Rotational motion होते है जो किन्ही तीन दिशाओं में हो सकते है। इसी प्रकार diatomic के लिए degree of freedom 5 होते हैं।

• TRIATOMIC GAS- इसे Polyatomic भी कहते हैं। Triatomic Molecules, 3 Mutually Perpendicular directions में से किसी भी Independent direction के परित: Rotational Motion करने के लिए यह free होते हैं। इसलिए इसके 6 degree of freedom होते हैं।

Question- Law of Equipartition of energy को लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

• Law of Equipartition of Energy-

इसके अनुसार बहुत सारे Particles से मिलकर बने एक dynamical system की total internal energy इसके लिए उपस्थित समस्त degree of freedom में एक समान रूप से devide होती है तथा प्रत्येक Particle के लिए प्रत्येक degree of freedom से सम्बन्धित Average Energy $1/2$ KT होती है। यहाँ K, Voltzman Constant है तथा T, साम्यावस्था में system का परमताप है।

• Proof-

माना Gas का 1 gms. mol है तथा इसके Molecule Random motion में है तथा इनके स्थानान्तरिय गति में 3 degree of freedom है। माना परमताप T पर Gas का Volume V है। माना एक molecule का वेग v है तथा इसके x, y तथा z दिशा में घटक v_x v_y, v_z है तब तीन परस्पर लम्बवत दिशाओं के लिए

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad \text{——— (1)}$$

क्योंकि Gas के molecule की निश्चित दिशा नहीं है इसलिए वेग का औसत मान $\overline{v}^2$ consider करते है तब eq^n (1) से

$$\overline{v_x}^2 = \overline{v_y}^2 = \overline{v_z}^2 = \frac{1}{3}\overline{v}^2$$

यदि Gas के 1 gms. mole में Molecules की संख्या N है जहाँ N आवोगाद्रो संख्या है तथा 1 molecule का mass m है तब gas की Kinetic Theory से

$$P = \frac{1}{3}.\frac{mN\overline{v}^2}{V} \quad \text{——— (2)}$$

अत:

$$PV = \frac{1}{3}mN\overline{v}^2$$

Ideal Gas के 1 gms. mole के लिए

$$PV = RT \quad \text{——— (3)}$$

इस प्रकार से

$$\frac{1}{3}.\frac{mN\overline{v}^2}{V} = \frac{RT}{V}$$

$$\frac{1}{3}m\overline{v}^2 = \frac{R}{N}T$$

यहाँ $\frac{R}{N} = K$, Boltzman Constant है तब

$$\frac{1}{3}m\bar{v}^2 = KT$$

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}KT \quad \text{——— ④}$$

Again, We know That

$$\bar{v_x}^2 = \bar{v_y}^2 = \bar{v_z}^2 = \frac{1}{3}\bar{v}^2$$

Multiply with m in whole Equation

$$\frac{1}{2}m\bar{v_x}^2 = \frac{1}{2}m\bar{v_y}^2 = \frac{1}{2}m\bar{v_z}^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}m\bar{v}^2\right)$$

तथा eq^n ④ से

$$\frac{1}{2}m\bar{v_x}^2 = \frac{1}{2}m\bar{v_y}^2 = \frac{1}{2}m\bar{v_z}^2 = \frac{1}{2}KT$$

यह गैस के प्रत्येक Molecule के लिए प्रति degree of freedom की Kinetic Energy है।

Question- सिद्ध कीजिए कि यदि Perfect Gas के Molecules के लिए n degree of freedom है तो दर्शाइये $C_P/C_V = 1 + \frac{2}{n}$ और इसके पश्चात monoatomic, diatomic, triatomic Gas के लिए Molar Specific Heat और γ का मान ज्ञात कीजिए।

माना Absolute temp. T पर Gas के 1 gms. mole में molecules की संख्या N है जो Avarage Number है। हम जानते है कि 1 degree of freedom के लिए Energy का मान $\frac{1}{2}KT$ होता है और n degree of freedom के लिए energy of Kinetic का मान $= \frac{1}{2}nKT$

और ideal Gas में उपस्थित molecules के कारण total energy का मान

$$U = N\left[\frac{1}{2}nKT\right]$$

$$U = \frac{1}{2}(NK)nT$$

हम जानते हैं Rydberg Constant $R = NK$, जहां K = Boltzman Constant है। इस प्रकार

$$U = \frac{1}{2} nRT \quad \text{——— ①}$$

eq^n ① को T की Respect में differentiate करने पर

$$\frac{dU}{dT} = \frac{1}{2} nR \quad \text{——— ②}$$

माना गैस को गर्म किया जाता है तथा इसका temp. dT से बढ़ जाता है। यदि Constant Volume पर इसकी specific Heat C_V है तो temp. Increase करने पर आवश्यक Heat का मान

$$dQ = C_V dT$$

क्योंकि Constant Volume पर $dV = 0$ है अतः

$$dW = 0$$

तब first Law of Thermodynamics के अनुसार

$$dQ = dU + dW$$

$$dQ = dU$$

इस प्रकार

$$dU = C_V dT$$

$$\frac{dU}{dT} = C_V$$

अतः eq^n ② से

$$C_V = \frac{1}{2} nR$$

हम जानते हैं Mayer's Relation

$$C_P - C_V = R$$

अतः $C_P - \frac{1}{2} nR = R$

$$C_P = R + \frac{1}{2} nR$$

यहां C_P, Constant Pressure पर specific Heat है तब

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{\left(\frac{n}{2} + 1\right) R}{\frac{1}{2} nR}$$

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\frac{n}{2}}$$

$$\boxed{\frac{C_p}{C_v} = 1+\frac{2}{n}}$$

हम जानते हैं specific Heats का Ratio

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

इस प्रकार

$$\boxed{\gamma = \left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

• Monoatomic Gas -

Monotonic Gas के लिए स्थानान्तरण गति में 3 degree of freedom होते हैं अर्थात

$$n = 3$$

तब $C_p = \left(1+\frac{n}{2}\right)R$

$$C_p = \frac{n}{2}R$$

$$\gamma = \left(1+\frac{2}{n}\right)$$

Rydberg constant $R = 2$ cal/mole . K

$$C_p = \left(1+\frac{3}{2}\right)\times 2$$

$$C_p = 5 \text{ cal/mole·K}$$

$$C_v = \frac{3}{2}\times 3$$

$$C_v = 3 \text{ cal/mole·K}$$

हम जानते हैं C_p, C_v का मान गैस के temp. से Independent होता है। इस प्रकार सभी temp पर Monoatomic Gas के लिए Molar specific Heat का मान समान रहता है।

- Di-atomic Gas-

$n = 5$

तब $C_p = \left(1 + \frac{n}{2}\right) R$

$C_v = \frac{n}{2} R$

$\gamma = \left(1 + \frac{2}{n}\right)$

Rydberg constant $R = 2$ cal/mole·K

$C_p = \left(1 + \frac{5}{2}\right) \times 2$

$C_p = 7$ cal/mole·K

$C_v = \frac{5}{2} \times 2$

$C_v = 5$ cal/mole·K

$\gamma = \left(1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{5} = 1.40$

- Tri-atomic Gas-

$n = 6$

Then

$C_p = \left(1 + \frac{6}{2}\right) \times 2$

$C_p = 8$ cal/mole·K

$C_v = \frac{6}{2} \times 2 = 6$ cal/mole·K

$\gamma = \left(1 + \frac{2}{6}\right) = \frac{8}{6} = 1.33$

Question- Gases में transport Phenomena क्या है?

Gas की Kinetic Theory के अनुसार Gas के Molecules सभी दिशाओं में अलग-2 Valocity से travel करते हैं। यदि Gas में इसके एक भाग से दूसरे भाग में mass-valocity, temperature या Molecular Consantration का परिवर्तन होता है तो गतिमान Molecule Gas में साम्यावस्था प्राप्त करने के लिए संवेग, गतिज ऊर्जा या द्रव्यमान का स्थानान्तरण करते हैं तथा इसके कारण Viscosity (श्यानता), Conduction (चालकता) तथा defusion (विसरण) की घटना होती है। यह इस प्रकार Explain की जा सकती है।

1. गैस के अलग-2 भाग में अलग-अलग वेग उपस्थित होते हैं तब Gas की अलग-2 Layers में इस कारण से Relative Motion होता है जो एक-दूसरे के सापेक्ष है। इस स्थिति में तेज गति से चलने वाली Layer धीमे चलने वाली Layer को संवेग स्थानान्तरित करती है जो Gas में साम्यावस्था को प्राप्त करने के लिए किया जाता है और इस प्रकार इससे Viscosity, की घटना प्राप्त होती है।

2. Gas के अलग-अलग भाग में temp. का मान अलग-2 होता है इस प्रकार से High temp Region में उपस्थित Gas के Molecules की Kinetic Energy Low temp. Region मे उपस्थित Gas के Molecules से कम होती है तथा High Kinetic Energy वाले Molecules तथा energy को High temp. Region से Low temp. Region में पहुँचा देते है तथा साम्यावस्था स्थापित कर देते है और यह घटना conduction कहलाती है।

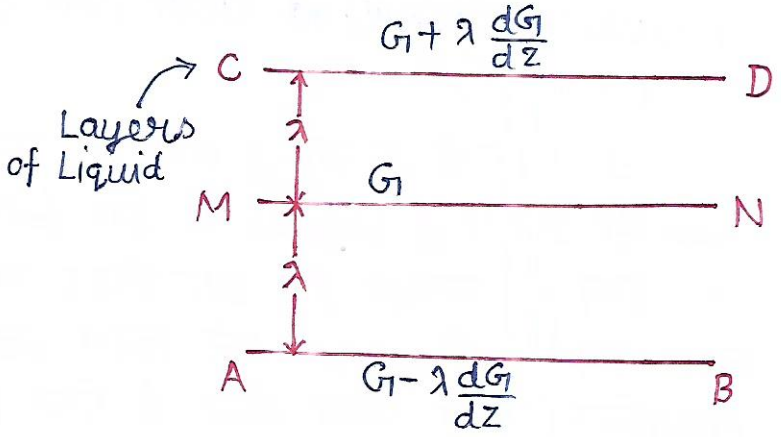
3. Gas में अलग-2 भाग में Molecules का Consuntration different different होता है। इस प्रकार से अधिक घनत्व वाले क्षेत्र से Molecules के mass का स्थानान्तरण कम घनत्व वाले Region में होता है। जिससे साम्यावस्था प्राप्त होती है। यह विसरण की घटना को दर्शाती है।

अतः Viscosity, Conduction तथा defusion के द्वारा संवेग, ऊर्जा तथा द्रव्यमान का स्थानान्तरण प्रदर्शित होता है अतः Viscosity, Conduction व defusion transport Phenomena है।

[Imp.]
Question- Kinetic Theory के आधार पर Gas के लिए श्यानता गुणांक के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए तथा दर्शाइये कि यह Pressure से स्वतन्त्र होता है तथा परमताप के वर्गमूल के समानुपाती होता है।

- Viscosity- माना Gas का निश्चित द्रव्यमान समान्तर Layers में travel कर रहा है जो कि AB तथा CD Layer से दर्शाया गया है। AB के लिए वेग 0 है जबकि CD के लिए वेग Maximum है। इन दोनों Layers

के Mid Point पर एक Layer MN consider करते हैं तथा इससे ऊपर की Layers का वेग इससे नीचे की Layers के वेग से अधिक है। तेज चलने वाली Layers, MN Layer पर स्पर्शी बल Apply करती है जो इसे तेज चलाने के लिए होता है जबकि नीचे वाली Layer MN पर पीछे की दिशा में कार्य करता है। इस प्रकार से Layer MN पर स्पर्श बल इस प्रकार होता है कि यह अपने दोनों तरफ की Layers के वेगों का अन्तर कम कर देता है और यह Property Gas में Viscosity कहलाती है।



Layer MN से ऊपर की सभी Layers में High Valocity तथा अधिक Momentum का मान उपस्थित होता है जो कि Horizontal Direction में है जबकि इससे नीचे की Layer में Momentum कम होता है। अत: CD Layer से अधिक Momentum के कुछ Molecules Layer MN के Across नीचे की ओर गति करते हैं जबकि कम Momentum वाले Molecules Layer MN के Across ऊपर की ओर जाते हैं। इस प्रकार से Layer MN के नीचे जो Layers धीमे चलती है वह संवेग प्राप्त कर लेती है और जो Layers MN से ऊपर है उनका संवेग कम होता है।

इस प्रकार से संवेग के स्थानान्तरण की घटना Viscosity कहलाती है।

हम जानते हैं Molecules की वह संख्या जो MN Layer के Across, प्रति एकांक क्षेत्रफल से प्रति sec ऊपर या नीचे की ओर travel करती है $= \frac{1}{6} n\vec{v}$

माना Plane MN Layer में प्रत्येक Molecule का momentum G है तब Layer के Perpendicular direction में संवेग परिवर्तन (Momentum Gradient) $= dG/dz$

तथा λ distance के लिए Momentum में change $= \lambda \frac{dG}{dz}$

इस प्रकार Layer CD में molecule का Momentum $= G + \lambda \frac{dG}{dz}$

तथा Layer AB में molecule का Momentum $= G - \lambda \frac{dG}{dz}$

अत: Layer AB से MN के Across Per Unit Area से Per Unit time में, upward जाने वाला Momentum $= \frac{1}{6} n\vec{v} \left(G - \lambda \frac{dG}{dz}\right)$

इसी प्रकार Layer CD से downward direction में MN के Across Per Unit Area से Per unit time में transfered Momentum = $\frac{1}{6} n\vec{v}\left(G + \lambda \frac{dG}{dz}\right)$

अत: MN के Per Unit Area से Per second में transfered net momentum = $\frac{1}{6} n\vec{v}\left(G + \lambda \frac{dG}{dz}\right) - \frac{1}{6} n\vec{v}\left(G - \lambda \frac{dG}{dz}\right)$

$$= \frac{1}{3} n\vec{v} \lambda \frac{dG}{dz} \quad \text{——— (1)}$$

यदि Layer MN में Molecule का वेग u है तब इसका Momentm $G = mu$

Whenever m, molecule का mass है।

इस प्रकार eq^n (1) में

$$= \frac{1}{3} n\vec{v} \lambda \frac{dG}{dz}$$

$$= \frac{1}{3} n\vec{v} \lambda \frac{d}{dz}(mu)$$

$$= \frac{1}{3} n\vec{v} \lambda m \frac{du}{dz}$$

Newton के अनुसार संवेग परिवर्तन की दर बल के बराबर होती है तथा श्यानता गुणांक वह अनुपात है जो 2 Layers के बीच प्रति एकांक के बीच कार्य करने वाले स्पर्श बल पर Velocity Gradiant से प्राप्त होता है। अत:

$$\eta = \frac{\frac{1}{3} n\vec{v} \lambda m \frac{du}{dz}}{\frac{du}{dz}}$$

$$\eta = \frac{1}{3} n\vec{v} m \lambda \quad \text{——— (2)}$$

हम जानते है Mean Free Path का मान

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \quad \text{——— (3)}$$

तब eq^n (2) से

$$\eta = \frac{1}{3} mn\vec{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

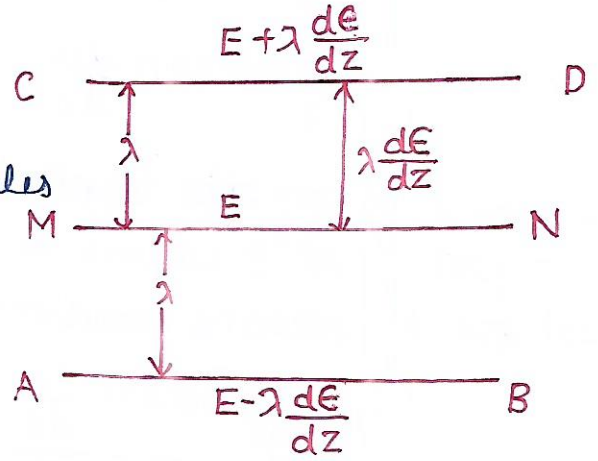
$$\eta = \frac{m\vec{v}}{3\sqrt{2}\pi d^2} \quad \text{——— (4)}$$

High vel.
Low vel.
↑ Lower Gas Layer

यह Result show करता है कि Cofficient of Viscosity (श्यानता गुणांक), Pressure से Independent होता है तथा गैस के परम ताप के square Root के Perposnal होता है। $[\because \vec{v} \propto \sqrt{T}]$

Question - Gas में Thermal Conductivity का गुणांक, Kinetic Theory के आधार पर प्राप्त कीजिए तथा दर्शाइए कि Gas की Thermal Conductivity Pressure से Independent होती है तथा परम ताप के Square Root के समानुपाती होती है।

Gas का द्रव्यमान Consider करते है। माना यह समान्तर Layers में गतिमान है तथा माना 2 Layers AB तथा CD है जो Upper Layer व Lower Layer है तथा इनके बीच Gas की Layers उपस्थित है जो समान्तर है। माना इन दोनों की मध्य दूरी पर एक Layer MN है।



जो Molecules MN Layer की स्थिति से ऊपर है उनके लिए temp. अधिक है जबकि इससे नीचे temp. कम है। इस प्रकार से अधिक temp. Region से Molecules निकलकर MN के Across नीचे की ओर जाते है जबकि कम temp वाले Region में से molecules MN के Across ऊपर की ओर जाते है। इस प्रकार MN से नीचे के Region में Molecules की Avarage energy बढ़ती है तथा ऊपर के Region में Avarage energy घटती है और इस प्रकार से ऊपर व नीचे के Region में temp. के मान Almost equal हो जाते है और यह Thermal Conduction, transport of energy कहलाता है।

हम जानते है Gas में Molecules सभी सम्भव दिशाओं में गति करते है। इस प्रकार से यदि प्रति एकांक आयतन में Molecules की संख्या n है और प्रत्येक के लिए Avarage speed $\vec{v}$ है तब MN Layer के Across प्रति एकांक क्षेत्र से प्रति sec. ऊपर की ओर व नीचे की ओर cross करने वाले Molecules की संख्या

$$= \frac{1}{6} n\vec{v} \quad \text{——— (1)}$$

माना Layer MN में Per molecule energy का मान E है तथा MN की लम्बवत् दिशा में energy Gradient $= \frac{dE}{dz}$

MN से Layer AB तथा CD λ दूरी पर हैं जो MeanFree Path है तब MN की लम्बवत दिशा में 01 Molecule के लिए total energy change $= \lambda \frac{dE}{dz}$

इस प्रकार CD Layer में उपस्थित Molecules की Energy $= E + \lambda \frac{dE}{dz}$

AB Layer में उपस्थित Molecules की Energy $= E - \lambda \frac{dE}{dz}$

तब Layer MN के Across Per Unit Area से Per sec, downward direction में transfered energy $= \frac{1}{6} n\vec{v}\left(E + \lambda \frac{dE}{dz}\right)$

इसी प्रकार Layer MN के Across Per Unit Area से Per sec., Upward direction में transfered energy $= \frac{1}{6} n\vec{v}\left(E - \lambda \frac{dE}{dz}\right)$

अतः Layer CD से MN के Across Per Unit Area से Per Sec. में transfered energy $= \frac{1}{6} n\vec{v}\left(E + \lambda \frac{dE}{dz}\right) - \frac{1}{6} n\vec{v}\left(E - \lambda \frac{dE}{dz}\right)$

$$= \frac{1}{3} n\vec{v} \lambda \frac{dE}{dz} \quad \text{——} (2)$$

यदि Gas के एकांक द्रव्यमान के लिए specific Heat c_v है जो कि constant Volume पर प्राप्त होती है तब Absollte temp T पर Maleculे की Energy

$$E = mc_v T \quad \text{——} (3)$$

तब eq^n (2) में Per Unit Area से Per Sec transfered Energy $= \frac{1}{3} n\vec{v} \lambda \frac{d}{dz}(mc_v T)$

$$= \frac{1}{3} mn\vec{v} c_v \frac{dT}{dz} \cdot \lambda$$

इस प्रकार Gas के लिए Thermal Conductivity का गुणांक वह अनुपात है जो प्रति एकांक क्षे० से प्रति सेकेण्ड स्थानान्तरित (transfered) Heat और temp Gradient से प्राप्त होता है। इस प्रकार से Gas के लिए Thermal Conductivity

$$K = \frac{\frac{1}{3} mn\vec{v} \lambda c_v \frac{dT}{dz}}{\frac{dT}{dz}}$$

$$K = \frac{1}{3} m n \vec{v} \lambda c_v \quad \text{——— ④}$$

यह Cofficent of Thermal Conductivity है और mean free Path का मान हम जानते हैं -

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2}$$

तब eq^n ④ से

$$K = \frac{1}{3} \cdot \frac{m n \vec{v} c_v}{\sqrt{2} \times d^2 n \cdot \pi}$$

$$\boxed{K = \frac{m \cdot c_v \vec{v}}{3\sqrt{2}\pi d^2}}$$

यह दर्शाता है कि Thermal Conductivity का गुणांक, Pressure से स्वतन्त्र होता है तथा Gas के Absolute temperature के वर्गमूल के समानुपाती होता है। पुन: Gas की Viscosity हम जानते हैं -

$$\eta = \frac{m \vec{v}}{3\sqrt{2}\pi d^2}$$

इस प्रकार

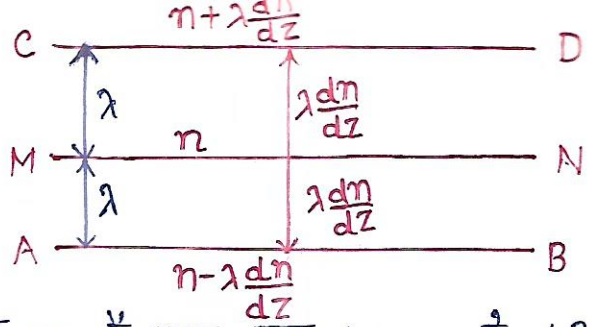
$$\frac{K}{\eta} = \frac{\frac{m \cdot c_v \vec{v}}{3\sqrt{2}\pi d^2}}{\frac{m \vec{v}}{3\sqrt{2}\pi d^2}}$$

OR $$\boxed{\frac{K}{\eta} = c_v}$$

Question- Kinetic Theory के आधार पर diffusion Cofficient D के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए तथा दर्शाइए कि यह temp. के साथ $T^{3/2}$ के अनुसार बढ़ती है तथा दर्शाइए $D = \eta/\rho$; जहां η श्यानता गुणांक तथा ρ गैस घनत्व है।

माना गैस का निश्चित द्रव्यमान Parallel Layers में travel कर रहा है तथा ऊपरी व नीचे वाली Layer क्रमश: CD व AB से दर्शाई जाती हैं। माना यदि प्रति एकांक आयतन में Molecules की संख्या Layer AB से CD की ओर ऊपर जाते हुए बढ़ती है तो इसका अर्थ है कि MN Layer से ऊपर की ओर Molecules का Concentration High होगा तथा MN Layer से नीचे की ओर Concentration Low होगा।

अत: साम्यावस्था बनाये रखने के लिए Molecules CD Layer से AB Layer की तरफ Move करते हैं तथा यह घटना diffusion कहलाती है। यह द्रव्यमान का transportation है।



माना MN Layer में Molecules का घनत्व n है तथा इस Layer से AB तथा CD Layer की दूरियाँ λ है तब MN Layer के Across Per Unit Area से प्रति sec. जाने वाले molecules की संख्या के लिए Gradient का मान dn/dz है।

यह घनत्व के परिवर्तन की दर है। जब λ main free Path है तो MN से CD तथा AB तक concentration में change $= \lambda\, dn/dz$

तथा MN Layer के ऊपर CD Layer में molecule का Concentration $= n+\lambda\frac{dn}{dz}$

इसी प्रकार MN के नीचे AB Layer में molecule का concentration $= n-\lambda\frac{dn}{dz}$

अत: CD Layer से MN Layer के across Per Unit Area से Per second move करने वाले Molecules $= \frac{1}{6}\left(n+\lambda\frac{dn}{dz}\right)\vec{v}$

इसी प्रकार AB Layer के ऊपर की ओर MN के Across Per Unit Area से Per second move करने वाले molecules $= \frac{1}{6}\left(n-\lambda\frac{dn}{dz}\right)\vec{v}$

अत: MN के Across Per Unit area से Per second, CD से AB Layer में net transfer $= \frac{1}{6}\left(n+\lambda\frac{dn}{dz}\right)\vec{v} - \frac{1}{6}\left(n-\lambda\frac{dn}{dz}\right)\vec{v}$

$$= \frac{1}{3}\lambda\vec{v}\frac{dn}{dz}$$

इस प्रकार से diffusion Cofficient, प्रति एकांक क्षे० से प्रति सेकेण्ड molecules की संख्या का Concentration Gradient के साथ Ratio है जो कि

$$D = \frac{\frac{1}{3}\lambda\vec{v}\frac{dn}{dz}}{\frac{dn}{dz}}$$

$$\boxed{D = \frac{1}{3}\lambda\vec{v}}$$

हम जानते हैं -

$$\lambda \propto \frac{1}{m}$$

$$\lambda \propto T$$

$$\vec{v} \propto \sqrt{T}$$

इस प्रकार

$$\lambda \propto \frac{T}{p}$$

$$\vec{v} \propto T^{1/2}$$

$$\boxed{D \propto p^{-1} T^{3/2}}$$

यह दर्शाता है कि cofficient of Deffusion $T^{3/2}$ के समानुपाती तथा Pressure के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

पुनः हम जानते हैं श्यानता गुणांक का मान

$$\eta = \frac{1}{3} m \vec{v} \lambda$$

तथा $D = \frac{1}{3} \vec{v} \lambda$

इस प्रकार

$$\frac{D}{\eta} = \frac{\frac{1}{3} \vec{v} \lambda}{\frac{1}{3} mn \vec{v} \lambda}$$

$$\frac{D}{\eta} = \frac{1}{mn}$$

तथा घनत्व $\rho = mn$

$$\frac{D}{\eta} = \frac{1}{\rho}$$

तथा $\boxed{D = \frac{\eta}{\rho}}$

Question- Mean free Path से आप क्या समझते हैं? गैस के Molecules के लिए इसका व्यंजक प्राप्त कीजिए। तथा दर्शाइए कि यह Gas के Pressure के व्युत्क्रमानुपाती है।

* Mean Free Path- Gas की Kinetic Theory के अनुसार Gas के Molecule सामान्य ताप पर बहुत अधिक वेगों से गतिमान होते हैं तथा इनकी गति पर किसी प्रकार का विकृत बल कार्य नहीं करता है।

Clasius के According Gas के molecule सूक्ष्म आकार के होते हैं तथा यह Gas में उपस्थित अन्य molecules में short time interval में टकराते हैं। जिससे इनके वेग Megnitude तथा direction में बदलते रहते हैं। यह Molecules गति करते हुए एक-दूसरे पर कोई Force Apply नहीं करते तथा जब ये Collide करते हैं केवल तभी एक-दूसरे पर Force लगाते हैं।

दो लगातार टक्करों के बीच यह सीधी रेखा में constant speed से travel करते हैं। इस प्रकार से एक molecule का total Path zig-zack shape में बहुत सारी short Path से मिलकर बना होता है और 2 Continuous Collisions के बीच यह Path, Free Path कहलाता है जो कि अलग-2 size के होते हैं तथा total Path में सभी Free Path के लिए Mean Value का मान Mean Free Path कहलाता है।

इस प्रकार से 1 molecule के लिए Mean Free Path दो क्रमागत Collisions के बीच travel की जाने वाली Avarage distance है।

यदि एक molecule के लिए इसके total Path में होने वाली टक्करों की संख्या n है तथा इसके लिए लिया गया कुल समय t है तो इन सभी टक्करों में लिया गया Free Path क्रमशः $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ है तथा सभी molecule की Avarage speed $\vec{v}$ है तो t समय के लिए

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = \vec{v}t \quad \text{---- (1)}$$

तथा n collisions के लिए mean free Path

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n} \quad \text{---- (2)}$$

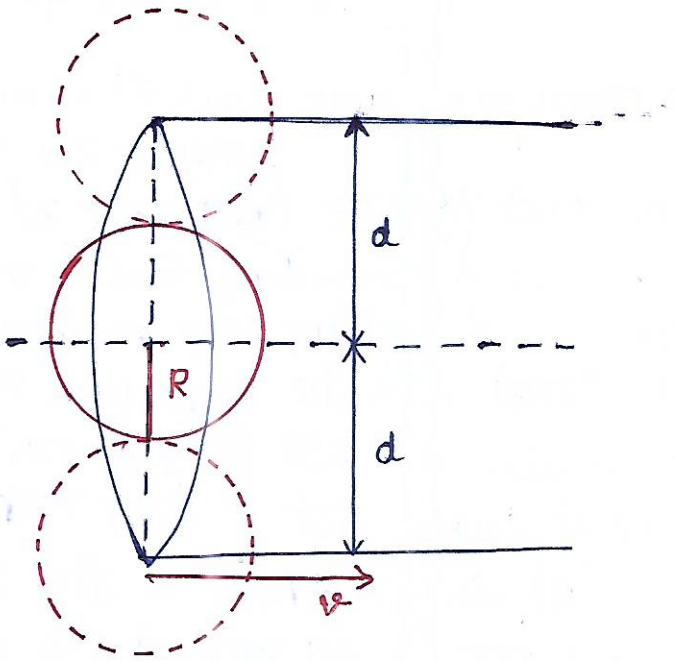
तथा eq^n (1) & (2) से

$$\boxed{\lambda = \frac{\vec{v}t}{n}}$$

यह Mean free Path के लिए Relation है।

* Expression for Mean Free Path-

माना Gas के Per Unit Volume में molecules की संख्या n है तथा प्रत्येक molecule की diameter d है। माना जिस molecule को consider किया जाता है वही motion में है। शेष सभी Rest State में है। यह moving molecule उन सभी molecules से टकराता है जिनके केन्द्र इस molecule की diameter के बराबर या उससे कम दूरी पर है।



यदि इस molecule का वेग v है तो यह molecule उन सभी molecule से टकराता है जो d त्रिज्या के cylinder में उपस्थित होते है जिसकी लम्बाई वेग के बराबर है। इस प्रकार से 1 second में तय की गयी दूरी के लिए cylinder का आयतन $= \pi d^2 v$

$[\because$ Volume of Cylinder $= \pi r^2 l]$

अत: moving molecule द्वारा 1 sec. में किए गये collisions की संख्या $= \pi d^2 v n$ क्योंकि molecule द्वारा 1 sec. में चली गयी दूरी v है तब इस moving molecule के लिए mean free Path $= \frac{v}{\pi d^2 v n} = \frac{1}{\pi d^2 n}$ ——— (1)

परन्तु यह Expression यह मानकर ज्ञात होता है कि केवल एक molecule गतिमान और शेष सभी स्थिर है। परन्तु यह वास्तविकता नहीं है। Maxwell ने अपनी अभिधारणा में माना कि सभी molecule सभी संभव वेगों से गतिमान होते है और यह सभी दिशाओं में संभव है तथा इन पर distribution Law Apply कर Maxwell ने निम्न Result दिए-

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \quad \text{——— (2)}$$

If 1 molecule का mass m है तब गैस का घनत्व

$$\rho = mn$$

Then, By eqn ②

$$\lambda = \frac{1 \times m}{\sqrt{2}\,\pi d^2 \cdot \rho}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{m}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho}} \quad \text{——— ③}$$

इस प्रकार यह दर्शाता है कि Mean Free Path का मान घनत्व (ρ) के Inversely Perposnal होता है।

पुन: Gas की Kinetic Theory के अनुसार

$$P = \frac{1}{3}\rho \overline{v^2} \quad \text{——— ④}$$

यहाँ $\overline{v^2}$ Mean square speed है

$$\overline{v^2} = \frac{3KT}{m}$$

तब Pressure का मान

$$P = \frac{1}{3}\rho\left[\frac{3KT}{m}\right]$$

$$P = \frac{\rho KT}{m}$$

$$\frac{m}{\rho} = \frac{KT}{P}$$

इस प्रकार समीकरण ③ से Mean Free Path

$$\boxed{\lambda = \frac{KT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}}$$

इस प्रकार Mean Free Path, Absolute temp. T के समानुपाती होता है तथा Gas के Pressure के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

Radiation (विकिरण)
(E.M.W)

*It depends on Temperature.
* These are electromagnetic Wave.

Question- Radiation Energy से आप क्या समझते हैं।

- Radiation- जब Heat का Flow एक Body से दूसरी Body में इस प्रकार होता है कि यह वातावरण को गर्म नहीं करती। यह Heat का Flow Radiation कहलाता है।

- Radiation Energy- प्रत्येक Body में इसके Temp. के कारण energy के उत्सर्जन की प्रवृत्ति होती है। इस energy को Radiant Energy या Thermal Radiation कहते हैं। यह Energy E.M.W के रूप में चलती है। इसके लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती। यह प्रकाश की चाल से चलते हैं।

- Properties of Thermal Radiation-
  1. Thermal Radiation, निर्वात में travel कर सकती है।
  2. यह सीधी रेखा में travel करती है।
  3. Thermal Radiation का परावर्तन, प्रकाश के परावर्तन के अनुसार है तथा अपवर्तन में भी यह अपवर्तन के नियमों का पालन करती है।
  4. Thermal Radiation जिस medium में travel करते हैं उसका temperature नहीं बदलता।
  5. Thermal Radiation Invert square Law का पालन करते हैं।
  6. प्रिज्म की सहायता से प्रकाश के स्प्रैक्ट्रम के समान ही Radiation का स्प्रैक्ट्रम प्राप्त किया जा सकता है।
  7. Thermal Radiation में भी ध्रुवण की घटना प्राप्त होती है।

Question- Prevost Theory पर short Notes लिखिए।

इस Theory के अनुसार प्रत्येक Body अपने temp. पर Heat का उत्सर्जन करती है और इसके Emittion की दर, Body की surface की Natwre और temp. पर निर्भर करती है। यह Body उसी समय पर अपने आस-पास के वातावरण में उपस्थित Body से मिलने वाले Radiation का Absorption करती है तथा इसका Rate Body की surface की nature तथा इसके चारों तरफ Present medium के temp. पर निर्भर करती है।
यह Body एक ही समय पर उन सभी Bodies से Heat का अवशोषण करती

है जिनका temp. इसके temp. से high होता है तथा उसी समय उन Bodies को Heat Exchange करती है जिनका temp. इनके temp से Low होता है।

Question- Perfect Blackbody (आदर्श कृष्णिका) किसे कहते हैं?

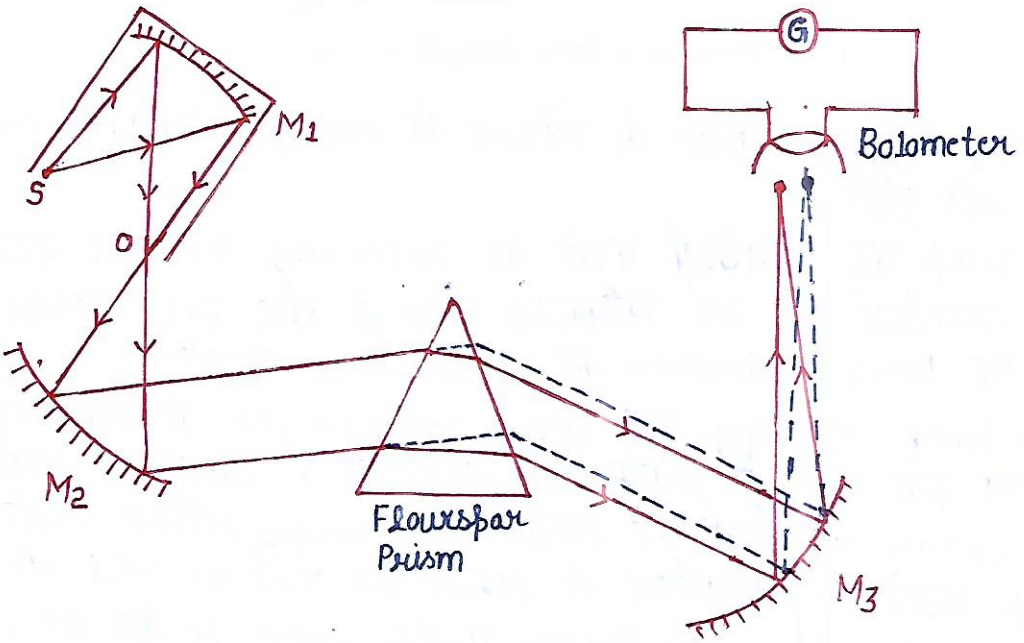
- **Perfect Blackbody-**

वह Body जो अपने surface पर incident होने वाले total Radiation को Absorve कर लेती है, Perfect Blackbody कहलाती है। चाहे Radiation की Wavelength (λ) कुछ भी हो।

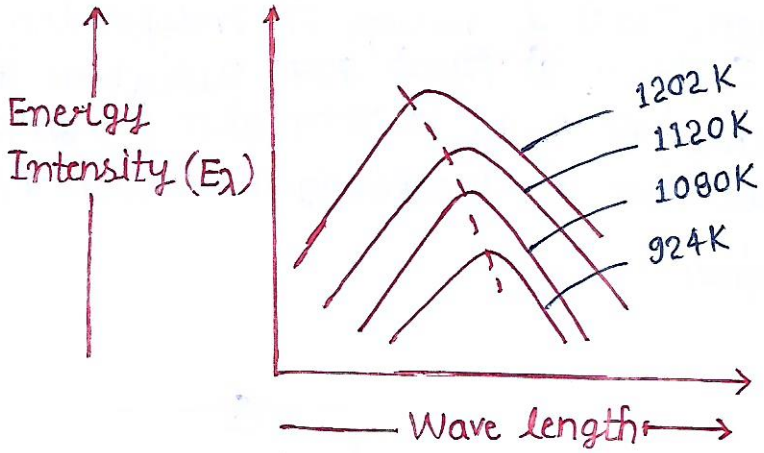
Question- Perfect Blackbody के लिए spectrum में energy distribution को Experimently study कीजिए।

एक Perfect Blackbody की सतह पर आपतित होने वाले Heat Radiation absorbe हो जाते हैं। चाहे उनकी Wavelength (λ) कुछ भी हो। इससे किसी भी प्रकार से Heat का परावर्तन व translation नहीं होता इसलिए यह Black दिखाई देती है। जब एक Blackbody को Isothermal Encloser में रखा जाता है तो यह इसकी दिवारों से उत्सर्जित होने वाले total Radiation Absorbe कर लेती है तथा यह Blackbody जब encloser के साथ साम्यावस्था में होती है तो इसके द्वारा Radiation का Emission किया जाता है। यह उत्सर्जित होने वाला Radiation, पदार्थ के nature से Independent होता है तथा Isothermal Encloser से मिलने वाला Radiation वैसा ही होता है जैसा कि समान temp. की Body से प्राप्त होता है। इसलिए Encloser से मिलने वाले Radiation को Blackbody Radiation कहते हैं।

- **Lummer- Prigsheim Experiment-**



Energy तथा density की study के लिए Lummer-Pringsheim ने Body के अलग-2 temp. पर उत्सर्जित होने वाले Radiation spectrum में energy के distribution को study किया। इनके द्वारा प्रयोग किये जाने वाला उपकरण का Arrangement Figure में दर्शाया गया है। यहां एक Electric Heated Chamber को Blackbody के रूप में प्रयोग किया जाता है। इससे निकलने वाला Radiation अवतल दर्पण M_1 पर आपतित होता है। यहां से यह Slits के द्वारा अवतल दर्पण M_2 पर आपतित होता है। यहां से यह flowrspar Prism पर आपतित होता है तथा हम जानते हैं प्रिज्म द्वारा अलग-2 तरंगदैर्ध्य के लिए अलग-2 Angle पर deviation प्राप्त करता है। यह deviation प्राप्त करने के बाद अपवर्तित Radiation Mirror M_3 पर आपतित होता है। जहां से यह Bolometer में प्रवेश करता है। यहां प्राप्त Intensity व Wavelength के बीच Graph बनाया जाता है और यह Curve distribution Curve कहलाता है। ये बनाये गये Curve अलग-2 temp. पर प्राप्त होते हैं।



1. Blackbody के Radiation के स्पैक्ट्रम में energy density, एक समान रूप से वितरित नहीं होती।
2. Given temp. पर तरंगदैर्ध्य बढ़ने पर Intensity का मान बढ़ता है तथा एक विशेष तरंगदैर्ध्य पर यह अधिकतम होता है और इसके पश्चात् पूर्ण Wavelength बढ़ाने पर Heat Radiation की Intensity घटती है।
3. Given temp. पर Long तथा short wavelength से सम्बन्धित Wavelength का मान कम होता है जबकि मध्य तरंगदैर्ध्य के लिए यह अधिक होता है। एक Particular तरंगदैर्ध्य पर सम्बान्धित Energy अधिक होती है।
4. temp बढ़ाने पर तरंगदैर्ध्य से सम्बान्धित ऊर्जा का मान भी बढ़ता है।
5. Stephen-Boltzman के अनुसार प्रत्येक curve में बंद क्षे०, total Radiation को दर्शाता है जो कि परमताप की fourth Power के समानुपाती है।
6. temp. बढ़ाने पर अधिकतम energy से सम्बान्धित Wavelength का मान

short Wavelength की तरफ shift होता है।

Question- Emission Power तथा Absorption Power से आप क्या समझते हैं तथा किरचॉफ का मान लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

- Emissive Power- हम जानते हैं किसी भी body में temp. के कारण उसकी surface से सभी दिशाओं में energy का Emission होता है अतः Given temp. पर emission का Rate body की surface से Per Unit Area से Per Sec. उत्सर्जित होने वाली energy है। यह surface की Nature तथा Area व उत्सर्जित तरंगदैर्ध्य पर निर्भर करती है। Unit - Joule/m^2·sec.

e = energy emit Per Unit area Per sec.

e_λ = Spectral emission Power

Unit ⇒ Joule/m^2· sec. Å

- Absorptive Power- जब किसी Body की surface पर Energy आपतित होती है तो इस energy का कुछ भाग surface से परावर्तित होता है तथा कुछ भाग इस surface पर Absorbe होता है जबकि कुछ transmit हो जाता है तथा इसका यह मान surface की Nature व Radiation की Wavelength पर निर्भर करता है अतः किसी surface के लिए Absorptive Power आपतित Radiation Energy के अवशोषित भाग व total Radiation Energy जो surface पर आपतित होती है, के अनुपात से प्राप्त होती है। इसे a से प्रदर्शित करते हैं।

- Kirchoff's Law- इसके अनुसार किसी भी तापमान पर सभी Bodies के लिए दिए गये तरंगदैर्ध्य पर उत्सर्जन क्षमता व अवशोषण क्षमता का मान समान होता है तथा उस तापमान पर Perfect blackbody के लिए उत्सर्जन क्षमता के equal होता है।

* Proof- माना एक Isothermal बंद बर्तन है। माना इसमें एक Body उपस्थित है। माना इस Body द्वारा Enclosure की Wall से dQ Heat प्राप्त की जाती है जो कि तरंगदैर्ध्य λ से $d\lambda+\lambda$ के बीच Body के Per Unit Area पर Per Second आपतित होती है। माना Body की surface के लिए अवशोषण क्षमता का मान a_λ है जो कि λ Wavelength के लिए है तब इस Body की surface पर Per Unit Area पर Per Sec. Absorbe Energy = $a_\lambda dQ$ तथा आपतित Energy का बचा हुआ भाग परावर्तित हो जाता है। इस प्रकार से यदि λ Wavelength पर Body की उत्सर्जन क्षमता e_λ है तो इसके Per Unit Area से Per sec. इसके temp. के कारण Absorbe Energy =

बंद बर्तन- Enclosure

Enclosure में रखी Body Enclosure की दीवारों के साथ साम्यावस्था में होती है. और इस स्थिति में Energy अवशोषण की दर व उत्सर्जन की दर Equal होनी चाहिए।
अर्थात

$$e_\lambda d\lambda = a_\lambda dQ$$

$$\frac{e_\lambda}{a_\lambda} d\lambda = dQ \quad \text{——} ①$$

पुनः same temp. State की Blackbody Consider करते हैं तथा माना इसकी surface पर dQ Heat आपतित की जाती है तब यदि इसकी अवशोषण क्षमता a'_λ ($a'_\lambda = 1$) है Perfect Blackbody के लिए। तब यदि Blackbody की λ Wavelength के लिए उत्सर्जन क्षमता E_λ है तो साम्यावस्था के लिए

$$= a'_\lambda dQ \quad [\because a'_\lambda = 1]$$

$$= E_\lambda d\lambda$$

$$E_\lambda d\lambda = a'_\lambda dQ$$

जबकि Perfect Blackbody के लिए $a'_\lambda = 1$, इस प्रकार

$$dQ = E_\lambda d\lambda \quad \text{——} ②$$

समी° ① & ② से

$$\frac{e_\lambda}{a_\lambda} d\lambda = E_\lambda d\lambda$$

$$\boxed{\frac{e_\lambda}{a_\lambda} = E_\lambda}$$

हम जानते हैं Perfect Blackbody के लिए Constant temp. पर उत्सर्जन क्षमता Constant रहती है। इसलिए

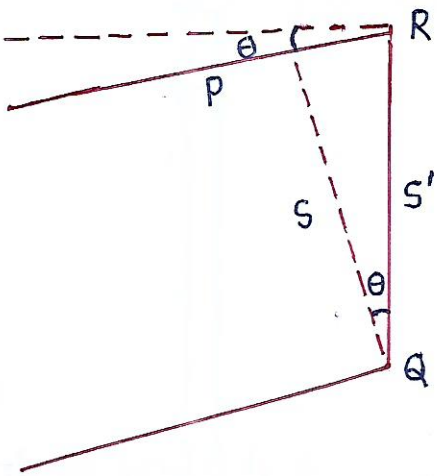
$$\boxed{\frac{e_\lambda}{a_\lambda} = \text{Constant}}$$

इस प्रकार Kirchoff's Law सिद्ध होता है।

Question- सिद्ध कीजिए किसी Cavity में बंद defused Radiation द्वारा दीवार पर Apply किया गया Pressure Energy density के 1/3 के बराबर होता है।

Defuse Radiation में सभी Molecule सभी दिशाओं में गति करते हैं

माना QR surface है। जिसका Area S' है तथा आपतित Radiation की Energy density μ है। माना आपतित Radiation, Surface QR से Q Angle पर आपतित होता है तथा PQ surface, इस आपतित Radiation के अभिलम्बवत है तब Surface PQ पर प्रति second आपतित होने वाली Energy



$$= \mu CS$$

यहां S, PQ का Area है तथा इसका मान

$$S = S'\cos\theta$$

इस प्रकार PQ surface पर प्रति Sec. आपतित Energy $= \mu CS'\cos\theta$

जो Energy Per Sec. surface PQ को Cross करती है वह surface QR पर पंहुचने वाली प्रति Sec. Energy है। इस प्रकार से QR Surface पर प्रति Sec. आपतित होने वाली Energy $= \mu CS'\cos\theta$

पुन: QR Surface पर Per Unit Area पर Per Sec. आपतित Energy

$$= \frac{\mu CS'\cos\theta}{S'}$$

$$= \mu C\cos\theta$$

इस प्रकार से QR Surface पर Per Unit Area पर Per Second आपतित होने वाली Momentum $= \frac{C\mu\cos\theta}{C}$

$$= \mu\cos\theta$$

अत: Surface QR पर Perpendicular Momentum

$$= \mu\cos\theta(\cos\theta)$$

$$= \mu\cos^2\theta$$

Rough

$E = mc^2$

$P = mC$

$P = \frac{mc^2}{C}$

$P = E/C$

यदि surface पर प्रति एकांक क्षेत्रफल पर यह total Momemtum Absorve होता है तो यह मान QR Surface पर Presssure का मान प्रकान करता है।

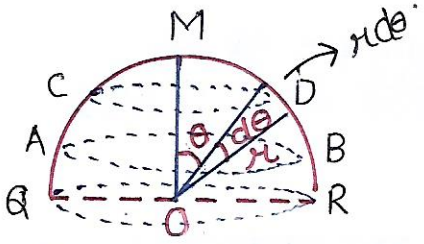
अत:

$$P = \mu\cos^2\theta \quad \text{——} \quad (1)$$

Deffuse Radiation के लिए हम जानते है आपतित Radiation सभी दिशाओं से समान Probability से आपतित होता है। इस प्रकार से deffuse Radiation

के कारण Pressure का मान = $\mu\overline{\cos^2\theta}$

यहां $\overline{\cos^2\theta}$, सभी दिशाओं में $\cos^2\theta$ की Avarage Value है।



Radiation के लिए हम जानते हैं, समान तीव्रता के N beams Consider किये जाते हैं जो सभी दिशाओं में एक समान रूप से distribution करता है। माना QR सतह पर Point O को Center मानकर r Radius के अर्द्धगोले का निर्माण करते हैं। माना इस पर Angle θ तथा $(\theta+d\theta)$ के लिए 2 Ring है तथा यह दो शंकुओं का आधार है तब Figure से Ring का Area

$$= 2\pi r \sin\theta \times r\,d\theta$$
$$= 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta$$

N Radiation, सभी direction में एक समान distributed है तब Ring के लिए Radiation की संख्या

$$dN = 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta \times \frac{N}{2\pi r^2}$$

$$\frac{dN}{N} = \sin\theta\, d\theta \quad \text{——②}$$

अत: Point O पर Pressure का मान = $\frac{dN}{N} \times \mu\cos^2\theta$

तब eq^n ② से,

$$P = \mu\cos^2\theta\,(\sin\theta\, d\theta)$$

तथा हम जानते हैं इस प्रकार के Ring $\theta = 0$ से $\theta = \pi/2$ के लिए सभी directions में उपस्थित है तब Pressure का मान

$$P = \int_0^{\pi/2} \mu\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$\boxed{P = \frac{1}{3}\mu}$$

5000%

Question- Blackbody Radiation के लिए Stephan's Law लिखिए तथा इसे Thermodynamics के Principles से Prove कीजिए तथा यह प्रयोगशाला रूप Verified होता है।

• Stefan's Law- इसे Law को सर्वप्रथम Stephan ने दिया जिसके अनुसार किसी Body के लिए Per Unit Area से Per Second Radiate होने वाली Energy Body के Absolute Temperature के 4th Power के अनुक्रमानुपाती होता है।

अत: यदि किसी Body का Absolute Temp^{r} T है तब इसके लिए Per Unit Area से Per Sec. Radiate होने वाली Energy

$$E \propto T^4$$

$$\boxed{E = \sigma T^4}$$

यहाँ σ, Stefan's Constant कहलाता है। यह Law, Boltzman ने Theoritically दिया। इसलिए इसे Stefan Boltzman Law भी कहते है।

यह Law Perfect Blackbody के लिए Apply होता है। यदि यह एक Blackbody को Enclosure में रखा जाता है तथा इनका temp. क्रमश: T व T_0 है तब Body की Surface द्वारा Per Sec. Radiate होने वाली Energy

$$E = \sigma (T^4 - T_0^4)$$

*Thermodynamics Proof- माना Perfectly Reflecting Walls का एक Cylinder है तथा इसमें एक Friction Less Piston लगा है जिसकी सतह पूर्ण परावर्तक है। माना इसमें deffuse Radiation भरा है जिसकी Energy density μ है क्योंकि Piston की Wall Perfect Reflect है अत: इनके द्वारा Energy का अवशोषण नहीं होता। हम जानते है deffuse Radiation के कारण Enclosure की Wall पर Apply होने वाला Pressure

$$\boxed{P = \frac{1}{3}\mu}$$

यह एक thermodynamics System के समान माना जा सकता है। माना Cylinder के बाहर से dQ Heat प्रवाहित की जाती है तब यदि Cylinder का Volume V से बढ़कर V+dV हो जाए तथा इसकी Entropy में change dS है व Internal Energy में change U हो तब इसकी Volume बढ़ाने में किया गया कार्य dW है तो

$$dW = PdV$$

According to First Law of Thermodynamics

$$dQ = dU + dW$$

$T\,ds = dU + P\,dV$

Cylinder में $U = \mu V$

यहां V, cylinder का Volume है।

तब $T ds = dU + P dV$

$$ds = \frac{dU + P dV}{T}$$

According to second Law of Maxwell

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

तब $$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\left(\frac{\partial V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial V}(\mu V)\right]_T + P = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

तब हम जानते हैं कि $P = 1/3\,\mu$

$$\mu + \frac{1}{3}\mu = \frac{T}{3}\cdot\frac{d\mu}{dT}$$

तब $$\frac{4}{3}\mu = \frac{T}{3}\cdot\frac{d\mu}{dT}$$

$$4\frac{dT}{T} = \frac{d\mu}{\mu}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = 4\frac{dT}{T}$$

$$\log_e \mu = \log T^4 + \log_e a$$

[∵ Integrate करने पर]

a is Integral Constant

$$\mu = aT^4$$

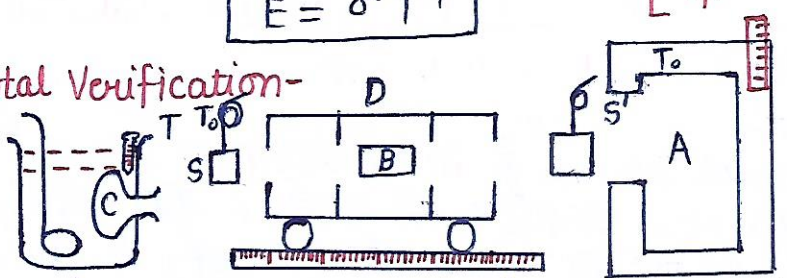
तथा Radiant Energy $E = \frac{1}{4}\mu C$

Thus $$E = \frac{1}{4}acT^4$$

$$\boxed{E = \sigma T^4}$$

$\left[\frac{1}{4}ac = \sigma,\ \text{Stefan's Constant}\right]$

- Experimental Verification-



Stefan's Law को Lummer तथा Pringshaim ने सत्यापित किया। इनके द्वारा use किया गया Experiment Figure में show किया गया है। इसमें Blackbody Radiation को प्राप्त करने के लिए chamber A तथा C का प्रयोग किया गया है। यहां A एक chamber है जिसकी दोहरी दीवार है तथा इनके बीच 100°C पर गर्म पानी को भरा जाता है जो कि Thermometer द्वारा ज्ञात कर लिया जाता है तथा इसकी कपाट पर एक cork S लगी होती है जो कि ठंडा करके लगाया जाता है

तथा C Copper का एक गोल बर्तन है जिसके अन्दर प्लैटिनम Black की कोटिन होती है तथा इसमें temp. 200°C से 600°C होता है। Chamber C का temp Electric Thermocople द्वारा मापा जाता है। इन दोनों Chambers से निर्गत होने वाली Energy को Bolometer B की Help से मापा जाता है जो कि एक बर्तन D के अन्दर रखा होता है। यह बर्तन D, meter Scale पर move करता है। इस बर्तन का एक सिरा (Chamber C की तरफ) Stop S द्वारा बंद कर दिया जाता है तथा यह भी ढंडा करके लगाया जाता है। अब Chamber A पर लगे Stop S' को हटाया जाता है जो Radiation को D में enter करने देता है तथा वहां उपस्थित Bolometer, Galvonometer विक्षेप उत्पन्न करता है जो कि विकिरण की Energy density का measurement है। बर्तन D की अलग-2 दूरी पर रखकर Galvonometer में विक्षेप Read किया जाता है तथा यह विक्षेप chamber A से दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। अब chamber C के सामने से stop S को हटाया जाता है। माना Chamber C का स्थायी temp. T है क्योंकि S stop बर्तन D पर लगा होता है। अतः इसका temp. A से आने वाले Radiation के temp के Equal होता है। माना यह temp. T_0 है। इस प्रकार से chamber C से Bolometer तक उतनी ही Energy की Intensity पहुंचती है जो कि T_0 से T तक का temp. बढाने पर प्राप्त होती है। अतः Stop S को हटाने पर प्राप्त होता है। अतः stop S(पर) को हटाने पर Bolometer पर पहुंचने वाली Radiation की मात्रा $(T^4 - T_0^4)$ के समानुपाती होती है। अतः अलग-अलग displacement के लिए Galvonometer में प्राप्त विक्षेप

$$x \propto (T^4 - T_0^4)$$

$$x = K(T^4 - T_0^4)$$

यहां K एक constant है। Lummer तथा Pringhein ने S' का temp. Const. रख Chamber C के अलग-2 temp. के लिए ज्ञात किया की K का मान स्थिर है और इस प्रकार Stefan's Law Verify होता है।

Question- Radiation के सम्बन्ध में Plank की Quantum परिकल्पना को बताइए तथा Plank Oscillators के लिए Energy को प्राप्त कीजिए तथा Plank Radiation Formula प्राप्त कीजिए तथा इसकी Help से इस Formula से Wien's Rayleigh-Jeans Law व Stefan's Law प्राप्त कीजिए। [Most Important]

- Plank Quantum Hypothesis - Blackbody के Radiation में Energy के distribution को समझाने के लिए Plank ने परिकल्पना दी कि Blackbody के Molecules Oscillators के समान होते हैं तथा प्रत्येक की एक अभिलक्षण आवृत्ति

होती है तथा Oscillators Cavity में Energy का उत्सर्जन तथा अवशोषण Electromagnatic Energy के रूप में करते हैं जिससे Cavity में साम्यावस्था बनी रहती है। इन्होंने Oscillators के सम्बन्ध में निम्न दो Hypothesis दी-

1. Oscillators की Energy की कुछ Discrete Value Possible है तथा यह

$$E = nh\nu$$

यहां ν, Radiation की frequency है तथा h, Plank Constant है और n quantum Number कहलाता है जिसका मान $n = 1, 2, 3, \ldots$

2. एक Oscillators के द्वारा energy का उत्सर्जन तथा अवशोषण Continuous नहीं बल्कि Small Packets के रूप में होता है। जिन्हें Quantum कहते हैं तथा इनकी Energy $h\nu$ होती है अर्थात

$$E = h\nu$$

• **Avarage Energy of Plank's Oscillators-** माना एक Cavity में energy $0, \epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon, \ldots n\epsilon$ से सम्बन्धित Oscillators की संख्या $N_0, N_1, N_2 \ldots N_n$ है तब एक Oscillator के लिए Avarage Energy का मान

$$\bar{\epsilon} = \frac{E}{N} \quad \text{——} (1)$$

E = total energy
N = Numbers of Oscillators

Maxwell Law के अनुसार, $n\epsilon$ energy से Related Oscillators की कुल संख्या

$$N_n = N_0 e^{-n\epsilon/KT}$$

तब Oscillators की कुल संख्या

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + \ldots + N_n + \ldots$$

$$N = N_0 + N_0 e^{-\epsilon/KT} + N_0 e^{-2\epsilon/KT} + \ldots + N_0 e^{-n\epsilon/KT}$$

$$N = N_0 \left[1 + e^{-\epsilon/KT} + e^{-2\epsilon/KT} + \ldots + e^{-n\epsilon/KT} + \ldots\right]$$

$$N = \frac{N_0}{(1 - e^{-\epsilon/KT})} \quad \text{——} (2)$$

इसी प्रकार total Energy

$$E = 0 \times N_0 + \epsilon N_1 + 2\epsilon N_2 + \ldots + n\epsilon N_n + \ldots$$

$$E = \epsilon N_0 e^{-\epsilon/KT} + 2\epsilon N_0 e^{-2\epsilon/KT} + \ldots + n\epsilon N_0 e^{-n\epsilon/KT} + \ldots$$

$$E = \epsilon N_0 e^{-\epsilon/KT}\left[1 + 2e^{-\epsilon/KT} + 3e^{-2\epsilon/KT} + \ldots + ne^{-(n-1)\epsilon/KT} + \ldots\right]$$

$$E = \frac{\epsilon N_0 e^{-\epsilon/KT}}{(1-e^{-\epsilon/KT})^2}$$

From eqⁿ (1)

$$\bar{E} = \frac{\epsilon N_0 e^{-\epsilon/KT}/(1-e^{-\epsilon/KT})}{N_0/(1-e^{-\epsilon/KT})}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon e^{-\epsilon/KT}}{(1-e^{-\epsilon/KT})}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{(e^{\epsilon/KT}-1)}$$

हम जानते हैं एक Quantum की Energy

$$\epsilon = h\nu$$

तब

$$\bar{\epsilon} = \frac{h\nu}{(e^{h\nu/KT}-1)} \quad \text{——— (3)}$$

हम जानते हैं Frequency ν से $(\nu + d\nu)$ Range के बीच उपस्थित Frequency से सम्बन्धित Radiation का उत्सर्जन करने वाले Oscillators की Per Unit Value में संख्या

$$= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu$$

तब energy density का मान

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \times \frac{h\nu}{(e^{h\nu/KT}-1)}$$

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} \cdot \frac{1}{(e^{h\nu/KT}-1)} d\nu \quad \text{——— ④}$$

यह frequency की terms में energy density के लिए expression है तथा यह Plank's Radiation Formula कहलाता है। हम जानते हैं।

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$d\nu = \frac{-c}{\lambda^2} d\lambda$$

अतः $$d\nu = \left|\frac{c}{\lambda^2}\right| d\lambda$$

अतः eq^n ④ में,

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi h c^3}{c^3 \times \lambda^3} \cdot \frac{1}{\left(e^{hc/\lambda KT}-1\right)} \cdot \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{(e^{hc/\lambda KT}-1)} d\lambda$$

यह Wavelength के पदों में Plank's Radiation Formula है। Wien's Law व Rayleigh-Jeans Law, Plank's Radiation Formula के दो special cases हैं जो इस प्रकार बताए जा सकते हैं।

(1) Wein's Law–

जब λ का मान काफी small है तब

$$(e^{hc/\lambda KT}-1) \approx e^{hc/\lambda KT}$$

अतः $$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot e^{-hc/\lambda KT} d\lambda$$

यदि $A = 8\pi hc$ तथा $B = \frac{hc}{K}$ तब

$$\boxed{u_\lambda d\lambda = \frac{A}{\lambda^5} \cdot e^{-B/\lambda T} d\lambda}$$

यह Expression, Wien's Law के समान है।

(ii) Rayleigh-Jeans Law-

जब λ का मान काफी बड़ा है तब

$$e^{hc/KT\lambda} <<< 1$$

$$e^{hc/\lambda KT} = 1 + \frac{hc}{\lambda KT} \quad (\text{Higher terms छोड़ने पर})$$

तब

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{hc}{\lambda KT} - 1\right)} d\lambda$$

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \times \frac{\lambda KT}{hc} d\lambda$$

$$\boxed{u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi KT}{\lambda^4} d\lambda}$$

यह Expression Reijleigh-Jeans Law के समान है।

(iii) Wien's Displacement Law- Maximum Spectral Energy से Related Wavelength के लिए

$$\frac{du_\lambda}{d\lambda} = 0$$

Plank's Radiation Formula से

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{(e^{hc/\lambda KT} - 1)}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{(e^{hc/\lambda KT} - 1)}\right] = 0$$

$$8\pi hc \frac{d}{d\lambda}\left[\lambda^{-5} (e^{hc/\lambda KT} - 1)^{-1}\right] = 0$$

$$8\pi hc\left[-5\lambda^{-6}\left(e^{hc/\lambda KT}-1\right)^{-1}+\lambda^{-5}(-1)\left(e^{hc/\lambda KT}-1\right)^{-2}e^{hc/\lambda KT}\left(\frac{-hc}{\lambda^2 KT}\right)\right]=0$$

$$8\pi hc\lambda^{-5}\left[\frac{-5}{\lambda}\left(e^{hc/\lambda KT}-1\right)^{-1}+\left(\frac{hc}{\lambda^2 KT}\right)e^{hc/\lambda KT}\left(e^{hc/\lambda KT}-1\right)^{-2}\right]=0$$

$$\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\left(e^{hc/\lambda KT}-1\right)^{-1}\left[\frac{-5}{\lambda}+\left(\frac{hc}{\lambda^2 KT}\right)\frac{e^{hc/\lambda KT}}{\left(e^{hc/\lambda KT}-1\right)}\right]=0$$

$$-\frac{5}{\lambda}+\frac{hc}{\lambda^2 KT}\cdot\frac{e^{hc/\lambda KT}}{\left(e^{hc/\lambda KT}-1\right)}=0$$

$$\frac{hc}{\lambda KT}+\frac{e^{hc/\lambda KT}}{\left(e^{hc/\lambda KT}-1\right)}=5$$

माना $\frac{hc}{\lambda KT}=x$

तब $\frac{x\cdot e^x}{(e^x-1)}=5$

$$\frac{x}{5}=\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)$$

$$\frac{x}{5}=1-\frac{1}{e^x}$$

$$\frac{x}{5}+e^{-x}=1$$

इस Eq^n का केवल एक ही हल संभव है।

$$x=4.965$$

तब $\frac{hc}{\lambda KT}=4.965$

$$\lambda_m T=\frac{hc}{4.965K}$$

यहां λm, Maximum Radiation Energy से Related Wavelength है।

Thus

$$\boxed{\lambda m T = \text{Constant}}$$

यह Wien's displacement Law है।

(iv) Stefan's Law- ν frequency से सम्बन्धित Plank के Radiation Formula के According

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{(e^{h\nu/KT}-1)}$$

हम जानते हैं Blackbody के लिए Radiation की energy density व Intensity में Relation

$$E = \frac{1}{4} uc$$

$$E_\nu d\nu = \frac{1}{4}(u_\nu d\nu)c$$

$$E_\nu d\nu = \frac{1}{4} \times \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{c}{(e^{h\nu/KT}-1)} d\nu$$

तब

$$E_\nu d\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \times \frac{1}{(e^{h\nu/KT}-1)} d\nu$$

Blackbody में सभी आवृत्तियों के लिए total Energy

$$E = \int_0^\infty \frac{2\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{(e^{h\nu/KT}-1)} d\nu$$

पुनः माना

$$\frac{h\nu}{KT} = x$$

अतः

$$\nu = \frac{KT}{h} \cdot x$$

व $d\nu = \frac{KT}{h} \cdot dx$

$$E = \int_0^\infty \frac{2\pi h}{c^2} \times \left(\frac{KT}{h}\right)^3 x^3 \cdot \frac{1}{(e^x - 1)} \cdot \frac{KT}{h} dx$$

$$E = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{KT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{(e^x - 1)} dx$$

Where $\int_0^\infty \frac{x^3}{(e^x - 1)} dx = \frac{\pi^4}{15}$

तब

$$E = \frac{2\pi^5 K^4}{15 c^2 h^3} \times T^4$$

यहां $\frac{2\pi^5 K^4}{15 c^2 h^3} = \sigma$, Stefan's Constant है।

तथा इस प्रकार,

$$\boxed{E = \sigma T^4}$$

Statistical Physics

Question- Phase Space से आप क्या समझते हैं तथा इसके Volume के लिए मान प्राप्त कीजिए।

• Phase Space – किसी Particle की Position को Classical Mechanics में दर्शाने के लिए तीन कार्तीय तलों (निर्देशाकों) की आवश्यकता होती है तथा Particle को motion की state तीन Velocity Components x, y, z द्वारा दर्शाई जाती है लेकिन कुछ Cases में Velocity के स्थान पर Momentum का प्रयोग किया जाता है और इस प्रकार से एक Particle की Position, Cartision Co-ordinatates तथा इससे Related momentum Co-ordinates से specify की जाती है। अतः Physical Space तथा Momentum Space का Combination Phase Space कहलाता है। यह six dimensional Space है जिसमें तीन Co-ordinates x, y, z तथा 3 Co-ordinates P_x, P_y, P_z होते है। यह परस्पर लम्बवत होते हैं।

इस प्रकार हम Imaginary Space को Consider करते हैं। इसमें तीन momentum Co-ordinates P_x, P_y, P_z परस्पर लम्बवत है तब इस Space में प्रत्येक Point Particle के momentum को दर्शाता है।

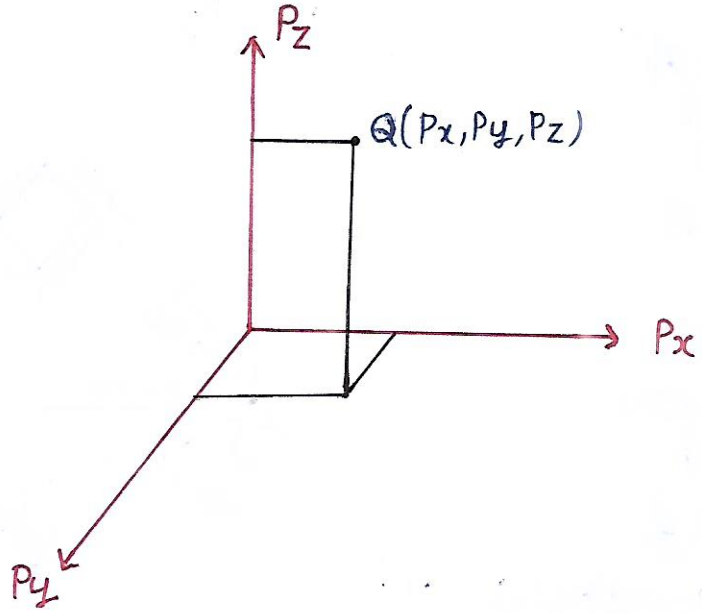


Figure में Point Q की दिशा Particle का Momentum प्रदर्शित करता है लेकिन यहां से Particle के लिए कोई Information प्राप्त नहीं होती। यदि इसके साथ Position की Information भी चाहिए तो यहाँ 6 विमा Space की आवश्यकता होती है। Phase Space केवल एक Mathematical Concept है तथा यह Actual में नहीं होता। इस प्रकार से Phase Space में उपस्थित प्रत्येक Point किसी भी क्षण Particle के Momentum तथा Position दोनों को show करता है। एक moving Particle की Position निश्चित नहीं होती है। इसलिए यह एक निश्चित Point पर consider न करके एक सूक्ष्म Space

में माना जाता है जिसका सूक्ष्म Volume

$$dz = dx\,dy\,dz\,dP_x\,dP_y\,dP_z$$

यहाँ $dx, dy, dz, dP_x, dP_y, dP_z$ इस Volume Element की Side दर्शाती है। यह Phase Space इस प्रकार के सूक्ष्म Volume में devide माना जाता है तथा इन्हें Phase Cell कहते हैं। यदि Phase Cell का Size काफी Small है तो Particle की Position की निश्चितता प्राप्त होती है तथा इसके लिए Uncertainity Principle के अनुसार

$$dx\,dP_x \geq \hbar$$
$$dy\,dP_y \geq \hbar$$
$$dz\,dP_z \geq \hbar$$

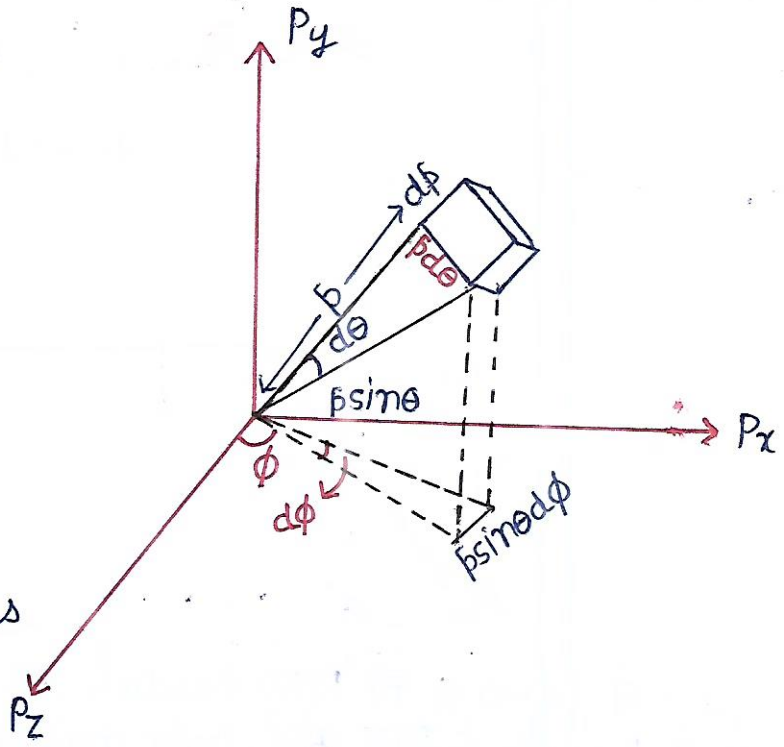
इस प्रकार

$$d\tau \geq \hbar^3$$

यदि किसी Point पर Minimum Volume का मान $\hbar^3$ है तो यह Point एक cell के समान माना जा सकता है।

- Volume In Phase Space -

माना momentum space में एक Volume उपस्थित है जो momentum के मान p से $(p+dp)$ के लिए है। Fig. में Momentum Space का Small element दर्शाया गया है जिसमें Co-ordinates, Range p से $(p+dp)$, ϕ से $(\phi+d\phi)$ व θ से $(\theta+d\theta)$ के बीच उपस्थित है। यहां Co-ordinates p, θ, व ϕ के मान Polar Co-ordinates r, ϕ, θ के समान है तब momentum space में element का Volume



$$d\tau_p = p\,d\theta \times dp \times p\sin\theta\,d\phi$$

$$d\tau_p = p^2 \sin\theta\,d\theta\,dp\,d\phi \quad \text{——— (1)}$$

पुनः p से (p+dp) के बीच उपस्थित momentum space का Volume जो कि momentum space का Volume जो कि direction से Independent है

$$d\tau_p = p^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \times dp$$

$$d\tau_p = p^2 (2) \cdot (2\pi) dp$$

$$d\tau_p = 4\pi p^2 dp \quad \text{——} (2)$$

यह Volume, उस Spherical Cell के Volume के समान है या समान माना जाता है जिसकी Radius p है तथा Thickness dp है। पुनः Phase space के लिए Volume element का मान निम्न है।

$$d\tau = d\tau_p \times \int_V dx\,dy\,dz$$

Here $\int_V dx\,dy\,dz = V$, Volume of Ordinary Space.

Thus

$$d\tau = 4\pi V p^2 dp \quad \text{——} (3)$$

यह Phase space के लिए Volume element का मान है तथा यह मान Kinetic Energy के पदों में भी बताया जा सकता है।

हम जानते है

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

E उस Particle की E_K है जिसका mass m है।

तब $p = (2mE)^{1/2}$

$$dp = \frac{1}{2}(2mE)^{-1/2} 2m\,dE$$

$$d\tau = 4\pi V (2mE) \cdot \frac{1}{2}(2mE)^{-1/2} 2m\,dE \quad [\text{By Eq}^n (3)]$$

$$d\tau = 4\pi V (2mE)^{1/2} \cdot 2m\,dE$$

$$\boxed{d\tau = 4\pi V (2m)^{3/2} E^{1/2} dE}$$

Question- एक One dimensional Harmonic Oscillator की Energy निम्न है-

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

यहां x, Position Co-ordinate तथा p_x Momentum Coordinate है। इस दोलक की two dimensional Phase Space में Accessible State प्राप्त कीजिए।

एक दोलक ऐसा Particle है जिसमें Kinetic Energy तथा Potential Energy दोनों होती है तब इसकी total Energy E का मान

$$\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

$$\frac{p_x^2}{2mE} + \frac{kx^2}{2E} = 1$$

$$\frac{p_x^2}{2mE} + \frac{x^2}{(2E/k)} = 1 \quad \text{——} \quad (0)$$

$$\frac{x^2}{(2E/k)} + \frac{p_x^2}{2mE} = 1 \quad \text{——} \quad (1)$$

यह eqn Phase space के लिए दीर्घवृत्त को show करती है जिसका Semi-Major व Semi-Minor Axis क्रमशः $a = \sqrt{2E/k}$ व $b = \sqrt{2mE}$ है।

इस प्रकार दीर्घवृत्त का क्षेत्रफल $= \pi ab$

$$A = \pi \left(\frac{2E}{k}\right)^{1/2} (2mE)^{1/2}$$

$$A = 2\pi E \left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}$$

यह Area, Oscillator के लिए Available Phase Space को दर्शाता है जिसकी Energy 0 से E के बीच है तथा Oscillator के लिए Energy E से $E+\delta E$ के बीच है। इसके लिए Available Phase Space

$$\delta A = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \delta E$$

इस प्रकार यह Area Osallator की accessible state को show करता है।

Question- एक Free Particle पर विचार कीजिए जो L चौड़ाई के Box में सीमित है तथा जिसकी Energy, Range E से E+δE के बीच है। इस system के लिए micro state की संख्या भी ज्ञात कीजिए।

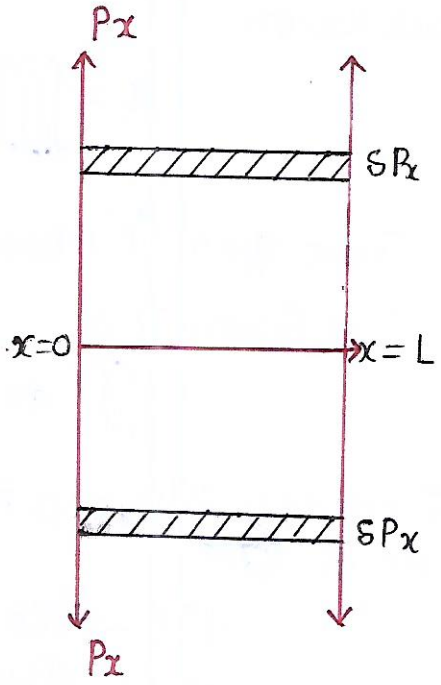
माना एक Particle है जो L लम्बाई के 1-D one box में गति कर रहा है। माना यह Box $x=0$ से $x=L$ के बीच है तथा Particle का motion x axis के अनुदिश है तब इस Particle के Motion के लिए two-dimensional Phase Space के Coordinates x तथा p_x है। हम जानते हैं free Particle की total Energy E है और इसका मान

$$\frac{1}{2}mv_x^2 = E$$

$$\frac{m^2v_x^2}{2m} = E$$

$$p_x^2 = 2mE$$

$$p_x = \pm\sqrt{2mE} \quad \text{——} (1)$$



तथा

$$\delta P_x = \frac{1}{2}(2mE)^{-1/2}\,2m\delta E$$

$$\delta P_x = \frac{1}{2}\left(\frac{2m}{E}\right)^{-1/2}\delta E$$

जब Particle की Energy E से (E+δE) के बीच है तो इसका momentum δP_x में होगा तब Particle के लिए Phase Space में Accessible Area

$$= 2L\delta P_x$$

तथा Phase Space में Phase Cell का Size

$$\delta x \delta P_x = h$$

इस प्रकार Accessible Area

$$= 2L\left(\frac{m}{2E}\right)^{1/2}\delta E$$

इस प्रकार Phase Cells की संख्या $= \frac{1}{h}(2m)^{1/2}E^{-1/2}\delta E$

तथा यह संख्या उन Phase Cells की संख्या है जिनमें Particles के पाए जाने की सम्भावना समान है।

Question- उस Phase Space में Phase Cells की संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें m Mass का Particle Volume V में है तथा Energy Range ZERO(0) से E है। प्रत्येक Phase Cell का Volume h^3 मानिए।

माना m Mass का एक Particle है तथा यह 3D Motion के लिए स्वतंत्र है। इसके लिए Phase Space 6-D होता है। इस प्रकार से Phase Space में Particles के निर्देशांक x, y, z तथा P_x, P_y, P_z है तब Phase Space का total Volume

$$\tau = \iiint\iiint dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z$$

Phase Space में Phase Cell का Size $= h^3$

But Given That

$$\iiint dx\,dy\,dz = V$$

यदि energy Range 0 से E में momentum 0 से P_{max} है तो momentum Space के लिए

$$d\tau_p = 4\pi p^2 dp$$

$$d\tau_p = \int_0^{P_{max}} 4\pi p^2 dp$$

$$\tau_p = \frac{4}{3}\pi P^3_{max}$$

इस Phase Space का total Volume

$$\tau = \frac{4}{3}\pi P^3_{max} \cdot V$$

$$\tau = \frac{4}{3}\pi V P^3_{max}$$

तब Free Particle के लिए momentum

$$P^2_{max} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$$

$$\frac{P^2_{max}}{2m} = E$$

अतः

$$\Gamma = \frac{4}{3}\pi V (2mE)^{3/2}$$

तथा Phase Cells की संख्या

$$\Gamma = \frac{\frac{4}{3}\pi V (2mE)^{3/2}}{h^3}$$

इस प्रकार Phase Cells की संख्या $= \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi V}{h^3}(2mE)^{3/2}$

तथा Energy Range E से (E+δE) में उपस्थित Phase Cells की संख्या

$$\Omega(\delta E) = \frac{4\pi V}{3h^3} \times \frac{3}{2}(2mE)^{1/2} 2m\delta E$$

$$\Omega(\delta E) = \frac{4\pi V}{h^3} m^{3/2} E^{1/2} \delta E$$

यह Single Particle के लिए Accessible Microstate की संख्या है।

Question- कणों की विभिन्न Energy states में distribution के सम्बन्ध में Maxwell-Boltzman distribution Law की व्याख्या कीजिए तथा show कीजिए कि अवस्था जितनी High होती है उनमें Particles की संख्या उतनी ही कम होती है।

- **Maxwell-Boltzman Distribution Law-** [LINK 1·1] Maxwell-Boltzman distribution Law, Energy की एक निश्चित मात्रा का उन Particles में Most Probable distribution दर्शाता है जो Particles Identical हैं तथा distinguishable हैं जो Particles Identical हैं व भेद्य हैं।

माना एक system में Molecules की संख्या N है। माना एक system के molecule की energies $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \ldots \epsilon_K$ energy state के लिए है। माना इन Energy state में किसी distribution के लिए molecules की संख्या $n_1, n_2, \ldots n_K$ है तब इन molecules का most Probable distribution निम्न दो condition के अन्तर्गत है-

(i) System में molecules की कुल संख्या N, Constant है।

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_K = N = \text{Constant}$$

$$\sum_{i=1}^{K} n_i = N = \text{Constant}$$

तथा $\sum_{i=1}^{K} \delta n_i = 0$ ——— (1)

(ii) सभी molecules के लिए total system की Energy E Constant है।

$$n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + n_3\epsilon_3 + \dots + n_K\epsilon_K = E = \text{Constant}$$

$$\sum_{i=1}^{K} n_i\epsilon_i = E = \text{Constant}$$

$$\sum_{i=1}^{K} \epsilon_i(\delta n_i) = 0 \quad \text{——— (2)}$$

तब इन molecules के most Probable Distribution के लिए

$$P = \frac{N!}{n_1!\, n_2! \dots n_K!}\, g_1^{n_1} g_2^{n_2} \dots g_K^{n_K} \quad \text{——— (3)}$$

यहाँ $g_1, g_2, \dots g_K$, energy state की Group Probability है तब Particles के Largest distribution को प्राप्त करने के लिए P के स्थान पर $\log_e P$ प्रयोग करते है।

$$\log_e P = \log_e N! - \sum_{i=1}^{K} \log_e n_i! + \sum_{i=1}^{K} \log_e g_i^{n_i}$$

$$\log_e P = \log_e N! - \sum_{i=1}^{K} \log_e n_i! + \sum_{i=1}^{K} n_i \log_e g_i$$

Stirling Formula से,

$$\log_e x! = x\log_e x - x$$

$$\log_e P = N\log_e N - N - \sum_{i=1}^{K} \left[n_i \log_e n_i - n_i \right] + \sum_{i=1}^{K} n_i \log_e g_i$$

$$\log_e P = N\log_e N - N + \underbrace{\sum_{i=1}^{K} n_i}_{N} - \sum_{i=1}^{K} n_i \log_e n_i + \sum_{i=1}^{K} n_i \log_e g_i$$

अत:

$$\log_e P = N\log_e N - \sum_{i=1}^{K} n_i \log_e n_i + \sum_{i=1}^{K} n_i \log_e q_i$$

Most Probable distribution के लिए,

$$\delta(\log_e P_{max}) = 0$$

$$\delta(N\log_e N) - \delta\left[\sum_{i=1}^{K} n_i \log_e n_i\right] + \delta\left[\sum_{i=1}^{K} n_i \log_e q_i\right] = 0$$

$$\left[\because \delta(N\log_e N) = 0\right]$$

$$0 - \sum_{i=1}^{K} \delta(\log_e n_i)\, n_i - \sum_{i=1}^{K} \log_e n_i\, (\delta n_i) + \sum_{i=1}^{K} \log_e q_i (\delta n_i) = 0$$

पुन:

$$\delta(\log_e n_i) = \frac{1}{n_i}\delta n_i$$

$$\sum_{i=1}^{K} \delta(\log_e n_i) = \frac{1}{n_i} \sum_{i=1}^{K} \delta n_i$$

पुन: eq^n ① से,

$$\sum_{i=1}^{K} \delta(\log_e n_i) = 0$$

अत:

$$-\sum_{i=1}^{K} \log_e n_i (\delta n_i) + \sum_{i=1}^{K} \log_e q_i (\delta n_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{K} \left[-\log_e n_i + \log_e q_i\right] \delta n_i = 0$$

इस प्रकार की Problem को Solve करने के लिए Langrage Method of Undetermined का Use करते हैं तथा eq^n ① & ② से $-\alpha$ व $-\beta$ की गुणा करने पर

$$\sum_{i=1}^{K} [-\log_e n_i + \log_e g_i - \alpha - \beta \epsilon_i] \delta n_i = 0$$

इस eq^n की Validity के लिए

$$-\log_e n_i + \log_e g_i - \alpha - \beta \epsilon_i = 0$$

Antilog लेने पर

$$\boxed{n_i = g_i e^{-\alpha} e^{-\beta \epsilon_i}}$$

यह Eq^n Maxwell Boltzman Distribution Law कहलाती है तथा यह विभिन्न Energy state में molecules के Most Probable distribution को show करती है। यहाँ ϵ_i का मान जितना अधिक होता है उसके लिए Molecules की संख्या उतनी ही कम होती है।

Question- Ideal Gas के Molecules में Maxwell-Boltzman speed Distribution के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए। इससे किसी molecule की temp. T पर speed v होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

- Maxwell-Boltzman Speed Distribution- माना Ideal Gas में molecules की संख्या N है तथा माना परमताप T पर Volume V है। Gas के molecule एक जैसे Gas के molecules identical हैं तथा distinguishable हैं। माना $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots \epsilon_K$ energies की Energy state में molecules का distribution $n_1, n_2, \ldots n_K$ है तब इन molecules के Most Probable Distribution के लिए निम्न दो condition हैं-

(i) Molecules की कुल संख्या constant है अर्थात

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_K = N$$

$$\sum_{i=1}^{K} n_i = N$$

तब $$\sum_{i=1}^{K} \delta n_i = 0 \quad \text{——— (1)}$$

(ii) system की total energy E constant है

$$n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \ldots + n_K\epsilon_K = E = \text{Constant}$$

$$\sum_{i=1}^{K} n_i \epsilon_i = E = \text{Constant}$$

तथा $$\sum_{i=1}^{K} \epsilon_i \delta n_i = 0 \quad \text{——— (2)}$$

तब Maxwell के distribution की Probability

$$P = \frac{N!}{n_1! n_2! \ldots n_K!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} \ldots g_K^{n_K}$$

अब सभी distribution के लिए P के स्थान पर $\log_e P$ का प्रयोग करते हैं तथा stirling's का Formula Use कर निम्न eqn प्राप्त होती है जो Most Probable distribution के लिए Valid है तथा यह

$$-\sum_{i=1}^{K} \log_e n_i \delta n_i + \sum_{i=1}^{K} \log_e g_i \delta n_i = 0$$

उपरोक्त eqn में Lagrange's Method of Undertermined Multipliers का प्रयोग कर निम्न eqn प्राप्त होती है,

$$n_i = g_i e^{-\alpha} e^{-\beta \epsilon_i} \quad \text{——— (3)}$$

यह Maxwell-Boltzman distribution Law है। यहाँ $e^{-\alpha}$ व β Constant है।

- **Determination of $e^{-\alpha}$ & β –** माना energy का distribution Continuous है तब eqn (3) इस प्रकार लिखी जा सकती है,

$$n(\epsilon) d\epsilon = g(\epsilon) e^{-\alpha} e^{-\beta \epsilon} d\epsilon \quad \text{——— (4)}$$

यहां $n(\epsilon) d\epsilon$, ϵ से $(\epsilon + d\epsilon)$ energy Range में Molecules की संख्या है। हम जानते हैं –

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m}$$

तब momentum P से (P+dP) के बीच मान के लिए molecules की संख्या

$$n(p) dp = g(p) e^{-\alpha} e^{-\beta p^2/2m} dp \quad \text{——— (5)}$$

यहाँ $g(p)dp$, Phase Space में, उन Phase Cells की संख्या है जिनके अन्दर Molecules उपस्थित हो सकते हैं तथा हम जानते हैं Phase Space में प्रत्येक Phase Cell का Volume h^3 होता है तब Phase Space में p से (p+dp) के बीच momentum के लिए

$$g(p) dp = \frac{\iiint\iiint dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z}{h^3}$$

Phase Space में P से (P+dP) के बीच momentum के लिए molecules द्वारा घेरा गया Volume साधारण Space $= \iiint dx\,dy\,dz = V$, तथा

$$\text{Momentum Space} = \iiint dp_x\,dp_y\,dp_z = 4\pi p^2 dp$$

इस प्रकार

$$g(p)dp = \frac{4\pi p^2 (dp) V}{h^3}$$

$$g(p)dp = \frac{4\pi V p^2 dp}{h^3}$$

तथा eq^n ⑤ में,

$$n(p)dp = \frac{4\pi V}{h^3} e^{-\alpha} e^{-\beta p^2/2m} p^2 dp \quad \text{——} ⑥$$

यदि Molecules की संख्या N है तो $e^{-\alpha}$ का मान ज्ञात करने के लिए

$$\int_0^\infty n(p)dp = N$$

$$\int_0^\infty \frac{4\pi V e^{-\alpha} e^{-\beta p^2/2m}}{h^3} = N$$

$$\frac{4\pi V e^{-\alpha}}{h^3} \int_0^\infty p^2 e^{-\beta p^2/2m} = N$$

यहाँ $\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi/a^3}$

तब $\int_0^\infty p^2 e^{-\beta p^2/2m} dp = \frac{1}{4}\sqrt{\pi/(\beta/2m)^3}$

इस प्रकार

$$\frac{4\pi V}{h^3} e^{-\alpha} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^{1/2} (2m)^{3/2}}{\beta^{3/2}} = N$$

$$e^{-\alpha} = \frac{Nh^3}{V} \times \frac{\beta^{3/2}}{\pi^{3/2}} \times \frac{1}{(2m)^{3/2}}$$

$$e^{-\alpha} = \frac{Nh^3}{V} \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2}$$

यह मान समी° ⑥ में रखने पर

$$n(p)dp = \frac{4\pi V}{h^3} e^{-\beta p^2/2m} p^2 \times \frac{Nh^3}{V} \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2} dp$$

$$n(p)dP = 4\pi N \left(\beta/2\pi m\right)^{3/2} p^2 e^{-\beta p^2/2m}\, dP \quad \text{——} (7)$$

β का मान ज्ञात करने के लिए हम Molecules के system की total Energy E ज्ञात करेंगे और इसके लिए eq^n (7) का मान ϵ के पदों में लिखने के लिए

$$p^2 = 2m\epsilon \;\&\; P = \sqrt{2m\epsilon}$$

तथा $$dP = \frac{1}{2}(2m\epsilon)^{-1/2}\, 2m\, d\epsilon$$

$$dP = \left(\frac{m}{2\epsilon}\right)^{1/2} d\epsilon$$

इस प्रकार

$$n(\epsilon)\, d\epsilon = 4\pi N \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2} (2m\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon} \left(\frac{m}{2\epsilon}\right)^{1/2} d\epsilon$$

अतः $$n(\epsilon)\, d\epsilon = \frac{4N}{2\sqrt{\pi}}\, \beta^{3/2} \epsilon^{1/2} e^{-\beta\epsilon}\, d\epsilon \quad \text{——} (8)$$

तथा total Energy

$$\int_0^\infty \epsilon\, [n(\epsilon)\, d\epsilon] = E$$

$$\text{व} \int_0^\infty \epsilon \left\{ \frac{2N\beta^{3/2}}{\pi^{1/2}}\, \epsilon^{1/2} e^{-\beta\epsilon}\, d\epsilon \right\} = E$$

$$\text{व} \int_0^\infty \frac{2N\beta^{3/2}}{\pi^{1/2}} \times \epsilon^{3/2} e^{-\beta\epsilon}\, d\epsilon = E$$

$$\frac{2N\beta^{3/2}}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \epsilon^{3/2} e^{-\beta\epsilon}\, d\epsilon = E$$

$$\left[\because \int_0^\infty x^{3/2} e^{-ax}\, dx = \frac{3}{4a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \right]$$

इस प्रकार

$$\int_0^\infty \epsilon^{3/2} e^{-\beta\epsilon} = \frac{3}{4\beta^2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

अतः

$$\frac{2N\beta^{3/2}}{\pi^{1/2}} \times \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^{1/2}}{\beta^{1/2}} = E$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{N}{\beta} = E \quad \text{——— (9)}$$

तथा हम जानते हैं Absolute Temp. T पर Molecules की Energy

$$E = \frac{3}{2} NKT \quad \text{——— (10)}$$

eq^n (9) & (10) से

$$\frac{1}{\beta} = KT$$

$$\beta = \frac{1}{KT}$$

eq^n (8) में मान रखने पर

$$n(\epsilon)d\epsilon = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{KT}\right)^{3/2} \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/KT} d\epsilon \quad \text{——— (11)}$$

Molecules की Kinetic Energy का मान $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2$ तब

$$d\epsilon = mv\,dv$$

इस प्रकार speed v से v+dv के बीच Molecules की संख्या

$$n(v)dv = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{KT}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)^{1/2} e^{\frac{-mv^2}{2KT}} \times mv\,dv$$

Multiply by $(2\pi/2\pi)$

$$n(v)dv = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{KT}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)^{1/2} e^{\frac{-mv^2}{2KT}} \cdot mv\,dv \times \frac{2\pi}{2\pi}$$

$$n(v)dv = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2KT}} dv \quad \text{——— (12)}$$

यहां $n(v)dv$, उन Molecules की संख्या है जो Absolute temp. T पर speed का मान v से (v+dv) धारण करते हैं तथा यह eq^n (12) Maxwell-Boltzman speed Distribution कहलाती है।

पुनः eq^n (12) से

$$\frac{n(v)dv}{N} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2KT}} dv$$

तब

$$P(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2KT}} dv$$

यह Molecules की v से $v+dv$ के बीच speed धारण की Probability है तथा v, speed धारण करने की Probability

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2KT}}$$

- **Average Speed-** Maxwell-Boltzman Speed distribution के According speed v से $(v+dv)$ को धारण करने वाले Molecules की संख्या

$$n(v)dv = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2KT}} dv$$

तब N molecule के लिए Average speed

$$\langle v \rangle = \bar{v} = v_{av} = \frac{1}{N_0}\int^{\infty} v \cdot n(v)dv$$

हम जानते हैं, इस प्रकार

$$\bar{v} = \frac{1}{N_0}\int^{\infty} v \times 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2KT}} dv$$

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2KT}} dv$$

$$\left[\because \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}\right]$$

अत: $$\int_0^{\infty} v^3 e^{-mv^2/2KT} dv = \frac{1}{2\left(\frac{m}{2KT}\right)^2} = \frac{4}{2}\left(\frac{KT}{m}\right)^2 = 2\left(\frac{KT}{m}\right)^2$$

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \times 2\left(\frac{KT}{m}\right)^2$$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{2}\times}\left(\frac{KT}{m}\right)^{1/2}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{16KT}{2\pi m}} = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}}$$

$$\boxed{\bar{v} = 1.59\sqrt{\frac{KT}{m}}}$$

- **Root Mean Square Speed-**

$$v_{rms} = \sqrt{(\overline{v^2})}$$

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N_0}\int^{\infty} v^2 n(v)\, dv$$

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N_0}\int^{\infty} v^2 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2KT}} dv$$

$$\overline{v^2} = \frac{4\pi N}{N}\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 e^{\frac{-mv^2}{2KT}} dv$$

$$\overline{v^2} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 e^{\frac{-mv^2}{2KT}} dv$$

$$\left[\because \int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}\right]$$

अत:

$$\int_0^{\infty} v^4 e^{\frac{-mv^2}{2KT}} dv = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{(m/2KT)^5}}$$

$$= \frac{3}{8}\pi^{1/2}\left(\frac{2KT}{m}\right)^{5/2}$$

इस प्रकार

$$\overline{v^2} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \times \frac{3}{8}\pi^{1/2}\left(\frac{2KT}{m}\right)^{5/2}$$

$$\overline{v^2} = \frac{3KT}{m}$$

तब $$\boxed{v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3KT}{m}} = 1.73\sqrt{\frac{KT}{m}}}$$

- **Most Probable Speed-** यह वह speed है जो सबसे अधिक Molecules के लिए उपस्थित होती है तथा इसे निम्न condition द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

$$\frac{d}{dv} n(v) = 0$$

हम जानते हैं

$$n(v)dv = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2KT}} dv$$

इस प्रकार

$$n(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2KT}}$$

अब

$$\frac{d}{dv} n(v) = \frac{d}{dv}\left[4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2KT}}\right]$$

Most Probable Speed के लिए

$$\frac{d}{dv}\left[4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2KT}}\right] = 0$$

इस प्रकार

$$4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \frac{d}{dv}\left[v^2 e^{\frac{-mv^2}{2KT}}\right] = 0$$

$$4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \neq 0$$

तथा Bracket की terms का differential

$$\left[2ve^{\frac{-mv^2}{2KT}} + v^2 e^{\frac{-mv^2}{2KT}} \left(\frac{-2mv}{2KT}\right)\right] = 0$$

$$2ve^{\frac{-mv^2}{2KT}} \left[1 - v^2 \frac{m}{2KT}\right] = 0$$

तब

$$1 - \frac{mv^2}{2KT} = 0$$

$$\frac{mv^2}{2KT} = 1$$

$$v^2 = \frac{2KT}{m}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$$

$$\boxed{v_p = 1.41\sqrt{\frac{KT}{m}}}$$

Question- Classical तथा Quantum-Statistical में क्या अन्तर है ? Maxwell Boltzman, Bose-Einstein तथा Fermi-Dirac द्वारा दी गयी statistics का वर्णन कीजिए।

• **Classical & Quantum Statistics**- हम जानते हैं Solid, Liquid व Gas बहुत सारे सूक्ष्म कणों का एक system है और इसी प्रकार से Radiation भी Photons की Assembly है क्योंकि अलग-अलग Particles की Actual Motions या इनके Mutual Reactions (पारस्परिक क्रियाएं) को study नहीं किया जा सकता है परन्तु किसी भी system के लिए Macro Properties का अध्ययन करके Particles के Most Probable व्यवहार को समझाया जा सकता है तथा इसके लिए विभिन्न अवस्थाओं में Statistics distribution को study किया जाता है। यह distribution Identical Particles में Statistics द्वारा Explain किया जाता है तथा इसके लिए तीन निम्न विचार हैं जो कि तीन Distribution के रूप में study किये जाते हैं-

1. Identical Particles का Spin कुछ भी हो सकता है और यह इतने दूर-दूर होते हैं कि अलग-अलग पहचाने जा सकते हैं। इन Particles के लिए Maxwell Boltzman distribution Law Apply होता है।
2. ये कण अभिन्न होते हैं। ये Identical Particle हैं इसलिए 2 Particles का 2 Energy states में Interchange होने पर Macro state पर कोई प्रभाव नहीं होता। इन Particles के लिए Bose-Einstein distribution या statistical Law Apply होता है।
3. Odd Half Integral Spin वाले Indistinguishable Particles होते हैं जो पाऊली के अपवर्जन नियम का पालन करता है। ऐसे कण e^-, p^+, Neutron, प्रकार के होते हैं तथा इनके लिए Fermi-Dirac Distribution Apply होता है।

इस प्रकार के कणों के लिए Classical तथा Quantum Statistical Apply हो सकती है परन्तु बाद के दो प्रकार के Particles के लिए केवल Quantum Statistics Apply होती है।

Maxwell-Boltzman Statistics

[LINK 1·1]

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{\beta E i}}$$

Bose-Einstein Statistics

Classical Statistics में Particles को भिन्न कण माना गया था परन्तु Boss Einstein Statistics में Particles अभिन्न कण होते हैं। ये Identical Particle हैं इसलिए 2 Particles का 2 Energy states में Interchange होने पर Macro state पर कोई प्रभाव नहीं होता। यहाँ यह माना जाता है कि Molecules के लिए

available Energy States की संख्या, Molecules की तुलना में अधिक है। Boss-Einstein distribution Law को प्राप्त करने के लिए माना n Indistinguisable Particle हैं तथा यह Particle Quantum Levels में devide हो गया है। माना Constant Energy State $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \ldots \epsilon_i \ldots$ के लिए molecules की संख्या $n_1, n_2, n_3 \ldots n_i \ldots$ हैं। माना g_i, किसी Energy Level ϵ_i में Phase Cells की संख्या है जो उन states के लिए degeneracy (Sub Level) बनाती है। इस प्रकार से g_i sublevel में n_i Indistiguisable Particles के distribution के लिए निम्न condition हैं।

1. सभी Particles Indistiguisable हैं इसलिए n_i Particles को चुनने के लिए different Waves में कोई प्रभाव नहीं होता।
2. 1st Quantum state में प्रत्येक Given State के लिए $0, 1, 2, \ldots, n_i$ तक Particles की संख्या हो सकती है।

हमारे पास Eq^n(3) को solve करने के लिए निम्न conditions हैं।

(1) System में Particles की संख्या Constant है; अर्थात

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_i + \ldots = n = \text{Constant}$$

$$\sum_i n_i = n = \text{Constant}$$

$$\sum_i \delta n_i = 0 \quad \text{——} \quad (4)$$

(2) System की total Energy constant है।

$$n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \ldots + n_i\epsilon_i + \ldots = E = \text{Constant}$$

$$\sum_i n_i\epsilon_i = E = \text{Constant}$$

$$\sum_i \epsilon_i(\delta n_i) = 0 \quad \text{——} \quad (5)$$

Eq^n (3) को Lagrange Method of Undetermined Multipliers का प्रयोग कर solve किया जाता है। इसके लिए Eq^n (4) व (5) में α व β की गुणा कर eq^n (3) में Add करने पर

$$\sum_i \left[\log_e \frac{n_i + g_i}{n_i} - \alpha - \beta\epsilon_i\right] \delta n_i = 0$$

$$\log_e \frac{n_i + g_i}{n_i} = \alpha + \beta\epsilon_i$$

$$\frac{n_i + g_i}{n_i} = e^{\alpha} - e^{\beta\epsilon_i}$$

$$1 + \frac{g_i}{n_i} = e^{\alpha} - e^{\beta\epsilon_i}$$

$$\frac{g_i}{n_i} = e^{\alpha} e^{\beta \epsilon_i} - 1$$

$$n_i = \frac{g_i}{[e^{\alpha} e^{\beta \epsilon_i} - 1]}$$

$$\boxed{n_i = \frac{g_i}{[e^{\alpha} e^{\beta \epsilon_i} - 1]}}$$

यह Eq^n उस system के लिए विभिन्न Energy Leveles में Particles के distribution को दर्शाती है जो Boss-Einstein Law का पालन करते हैं तथा उपरोक्त eq^n Boss-Einstein Distribution Law कहलाती है।

Fermi-Dirac Distribution Law

Fermi-Dirac Statistics को वह Particles Obey करते हैं जो Half Integral Spin के साथ होते हैं तथा अभिन्न कण हैं और ये Particles Poly's Exclusion Principle का पालन करते हैं। माना एक system में Indistinguisiable Particles की संख्या n है। माना यह Particles Constant Energy वाली state $\epsilon_1, \epsilon_2 \ldots \epsilon_{ni}$ में distribute होते हैं तथा इनकी संख्या क्रमश: $n_1, n_2, \ldots n_i$ है। माना किसी 1st Level के लिए सभी Sublevel की संख्या g_i है तब इसके लिए Fermi-Dirac Distribution Law प्राप्त करने के लिए Fermi-Dirac की निम्न Conditions हैं-

(i) क्योंकि सभी Particles अभिन्न है अत: n_i Particles को चुनने के तरीके में कोई अन्तर नहीं है।

(ii) यह Particles Poly's Exclusion Law का पालन करते हैं। जिसके अनुसार प्रत्येक sub-shell में Particle 0 व 1 होता है अर्थात् g_i का मान n_i के बराबर या इससे अधिक होना चाहिए।

(iii) किसी system के लिए total Energy का मान उसके different Quantum Group में उपस्थित सभी Particles की total Energy से प्राप्त होता है। क्योंकि Poly's Exclusion Law के According किसी भी shell में Particle की संख्या 1 से अधिक नहीं हो सकती। इसलिए g_i shell में only n_i shell ही ऐसी होगी जिसमें Particles Present होंगे तथा शेष $(g_i - n_i)$ खाली होगी। इस प्रकार से g_i shell में n_i Particles की total Ways इस प्रकार है-

$$= \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$$

इसी प्रकार से सभी energy Leveles के लिए मान प्राप्त होता है तब Particle के लिए distribution के लिए पूरे system की total Sublevels

$$\Omega = \frac{g_1!}{n_1!(g_1 - n_1)!} \times \frac{g_2!}{[n_2(g_2 - n_2)!} \times \ldots$$

$$\Omega = \frac{\pi_i g_i!}{\pi_i! (g_i - n_i)!}$$

$$\Omega = \pi_i \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!}$$

तथा सभी Particles के लिए distribution को प्राप्त करने के लिए

$$\log_e \Omega = \sum_i [\log_e g_i! - \log_e n_i! - \log_e (g_i - n_i)!]$$

n_i की तुलना में g_i का मान बहुत बड़ा है तथा उपरोक्त eqn को stirling's Relation से solve करने पर

$$\log_e \Omega = \sum_i [\{g_i \log_e g_i - g_i\} - \{n_i \log_e n_i - n_i\} - \{(g_i - n_i) \log_e (g_i - n_i) + (g_i - n_i)\}]$$

$$\log_e \Omega = \sum_i [g_i \log g_i - (g_i - n_i) - n_i \log_e n_i - (n_i - g_i) \log (n_i - g_i) + (g_i - n_i)]$$

$$\log_e \Omega = \sum_i [\delta\{g_i \log_e g_i\} - \delta\{n_i \log_e n_i\} - \delta\{(g_i - n_i) \log_e (g_i - n_i)\}]$$

$[\because g_i$ is constant Here$]$ Thus

$$\delta(\log_e \Omega) = \sum_i \left[-\log_e n_i - \delta n_i - n_i \cdot \frac{1}{n_i} \delta n_i - \left\{\delta n_i \log_e (g_i - n_i) + (g_i - n_i) \frac{(-\delta n_i)}{(g_i - n_i)}\right\}\right]$$

$$\delta(\log_e \Omega) = \sum_i [-\log_e n_i (\delta n_i) - \delta n_i + (\delta n_i) \log_e (g_i - n_i) + \delta n_i]$$

$$\delta(\log_e \Omega) = \sum_i [-\log_e n_i (\delta n_i) + \log_e (g_i - n_i) \delta n_i]$$

Most Probable Distribution के लिए

$$\boxed{\delta[\log_e \Omega]_{max} = 0}$$

$$-\sum_i [\log_e (n_i) - \log_e (g_i - n_i)] \delta n_i = 0$$

$$-\sum_i \log_e \left(\frac{n_i}{g_i - n_i}\right) \delta n_i = 0$$

$$\left[\sum_i \log_e \frac{n_i}{g_i - n_i}\right] \delta n_i = 0 \quad \text{——— (1)}$$

उपरोक्त Fermi-Dirac distribution के लिए निम्न condition है।

(i) system में उपस्थित सभी Particles की कुल संख्या constant है।

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_i + \ldots = 0$$

$$\sum_i n_i = 0$$

$$\sum_i \delta n_i = 0 \quad \text{——— (2)}$$

(ii) System की total Energy constant है।

$$n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \ldots + n_i\epsilon_i + \ldots = E = \text{Constant}$$

$$\sum_i n_i \epsilon_i = E = \text{constant}$$

$$\sum_i \epsilon_i \delta n_i = 0 \quad \text{——— (3)}$$

Eq^n (1) को solve करने पर Lagrange का Undeterminant Multipliers का method Use किया जाता है। इसके लिए Eq^n (2) व (3) में α व β से गुणा कर eq^n (1) में जोड़ने पर

$$\sum_i \left[\log_e \frac{n_i}{g_i - n_i} + \alpha + \beta\epsilon_i\right] \delta n_i = 0$$

$$\log_e \frac{n_i}{g_i - n_i} = -\alpha - \beta\epsilon_i$$

$$\frac{n_i}{g_i - n_i} = e^{-\alpha} e^{-\beta\epsilon_i}$$

$$\frac{g_i - n_i}{n_i} = e^{\alpha} e^{\beta\epsilon_i}$$

$$\frac{g_i}{n_i} - 1 = e^{\alpha} e^{\beta\epsilon_i}$$

$$\frac{g_i}{n_i} = e^{\alpha} e^{\beta\epsilon_i} + 1$$

$$\boxed{n_i = \frac{g_i}{[e^{\alpha} e^{\beta\epsilon_i} + 1]}}$$

यह Fermi-Dirac Distribution Law कहलाता है।

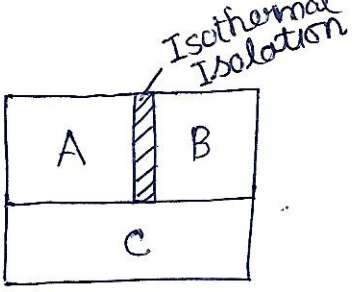
• Comparision of Three Statistics -

S.N	Maxwell-Boltzman Statistics	Bose-Einstein Statistics	Fermi-Dirac Statistics
1.	इस statistics में Particles Unlike तथा distinguishable हैं।	इसमें सभी Particles एक जैसे तथा अभिन्न हैं।	इसमें सभी Particles एक जैसे तथा अभिन्न हैं।
2.	Particles में किसी भी प्रकार का spin हो सकता है।	Particles के लिए spin 0 या Integral के मान में होता है।	Particles के लिए spin odd half Integral spin होता है।
3.	Phase space के दिये गये Volume के लिए Phase Cell का size निश्चित नहीं होता।	Phase Cell का Volume स्वैच्छिक रूप से चुना नहीं जा सकता तथा इसके लिए Phase Cell का न्यूनतम size h^3 होता है।	Phase Cell का Volume स्वैच्छिक रूप से चुना नहीं जा सकता तथा इसके लिए Phase Cell का minimum Size h^3 होता है।
4.	एक Phase Cell में Particles की संख्या के लिए कोई बाध्यता नहीं है।	एक Phase Cell में Particles की संख्या के लिए कोई बाध्यता नहीं है।	यहां के लिए cells में Particle की संख्या के लिए बाध्यता है अत: 1 cell में Poly के अनुसार 1 ही Particle होगा।
5	Particles का 1 cell से दूसरी cell में परस्पर स्थानान्तरण एक नई Microstate प्रदान करता है।	क्योंकि सभी Particle Identical है अत: इनका परस्पर स्थानान्तरण New Microstate का कारण नहीं होता।	क्योंकि सभी Particles Identical है अत: इनका परस्पर स्थानान्तरण New Microstate का कारण नहीं होता।
6.	इस Statistics में Thermo-dynamic Property का मान $\Omega = \pi_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$	इस statistics में Thermodynamic Property का मान $\Omega = \pi_i \frac{(n_i+g_i-1)!}{n_i!\,(g_i-1)!}$	इस statistics में Thermodynamic Property का मान $\Omega = \pi_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i-n_i)!}$

[Lee's Method]

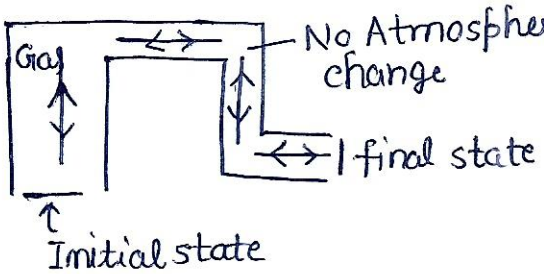
Important Questions in thermal Physics

• Zero Law-

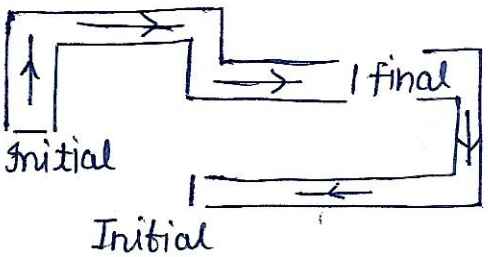


Quora
↓
JAM
↓
Registor → •

• Reversible Process-



• Irreversible Process-



[THERMAL PHYSICS AND STATISTICAL PHYSICS IMPORTANT QUESTION]

ABHISHEK BOHARE

(1) Thermodynamics

- Mayer Formula
- Carnot Cycle
- Numerical Problem on Entropy
- Work done (Isothermal, Adiabatic)
- Expension and Compression Coefficient
- Poission's Eqn
- T-S diagram
- 0,1,2,3 Law of Thermodynamics

(2) Thermodynamic Potential

- Maxwell's Relations
- Negative Specific Heat of Water, Vapour
- Joule Thomson Effect
- Clausius Clypeyron eqn
- Tds eqn
- Thermodynamic Potential Definition

(3) K.T.G.

- Mean Free Path
- Transport Phenomena
- Mono, di, Tri Atomic (degree of freedom)
- Viscosity, Conduction / diffusion

(4) Radiation

- Plank's Law
- Kirchoff's Law
- Stephen and Wein Law

(5) Statistical Physics

- Maxwell Boltzman Distribution Law (100%)
- Difference b/t Three Statistics

IMPORTANT

- Kirchoff's Law
- Stephen's Law
- Plank's Law
- Wein's displacement Law
- Carnot Engine
- $C_p - C_v = \gamma$
- Thermodynamic Potential → IInd / IVth
- भाप की विशिष्ट उष्मा
- Adiabatic Process
- Entropy 's Process → Isobaric, Isothermal, Isochoric
- Absolute scale and Ideal scale Comparison
- Entropy's Physical Significance
- Work done in Isothermal/Adiabatic
- Isothermal/Adiabatic Elasticity
- Poisioness Eq^n
- Efficiency of Carnot Engine

IMPORTANT

• Carnot Engine · Efficiency

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

• temperature का मात्रक होता है लेकिन temp. difference का मात्रक नहीं होता।

$$\frac{W}{Q} = J$$

$$W = J \times Q$$

Multiply 4.2 to change E.

$$\frac{W}{J} = Q$$

• 1 वायुमण्डलीय दाब बढ़ाने से 0°C पर जल के हिमांक में परिवर्तन ज्ञात कीजिए। [dT = -0.0075°C]

0°C पर Water की Latent Heat = 80 Cal/gms.

बर्फ की विशिष्ट उष्मा(V) = 1.019 cm^3

1 atp = 1.013×10^5 Dyne cm^{-2}

$V_1 = 1.019\ cm^3/gms$

$V_2 = 1.000\ cm^3/gms$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{JL}{T(V_2 - V_1)}$$

• निम्न आकड़ो का प्रयोग कर saturated Vapour की विशिष्ट उष्मा का परिकलन कीजिए।

$$\frac{dL}{dT} = -0.64\ Cal/gms°C$$

$$c = 1.01\ Cal/gms \cdot °C$$

$$\boxed{c_2 = -1.0077\ Cal/gms\,°C}$$

$$\frac{dL}{dT} - \frac{L}{T} = C_2 - C_1$$

$$C_2 = C_1 + \frac{dL}{dT} - \frac{L}{T}$$

जल की विशिष्ट उष्मा = 80 cal/gms
जल की गुप्त उष्मा = 540 cal/gms.
T = 100°C

• एक 100KW का इंजन 217°C तथा 17°C के बीच कार्य कर रहा है। Source से ली गयी Heat Sink को दी गयी Heat तथा Engine की Efficiency ज्ञात करो -

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$e = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$100\ KW = 100 \times 10^3\ J/sec.$

$= 10^5\ J/sec.$

$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1} = ?$$

$T_1 = 217 + 273$

$T_2 = 17 + 273$

$$Q = \frac{W}{e} = Joule$$

$$\frac{W}{Q} = J$$

Joule/Calorie

IMPORTANT

ABHISHEK BOHARE

B.Sc IIIrd Semester 2016-17

M.M = 70

[SECTION-A]

5 x 5 = 25

• Attempt any five questions.

1. What is Zeroth Law of Thermodynamics?
2. Explain Reversible and Irreversible Process?

OR

Prove the following Relation:

$C_p - C_v = R$

3. Explain Entropy.
4. Give Definition of Thermodynamic Potential.
5. Prove Clausius Clapeyron's Latent Heat equation Using Carnot cycle.
6. Explain Radiation and Radiation energy.
7. What is degree of Freedom? Explain it for monoatomic, diatomic and triatomic Gas

OR

Explain Phase space and Find the value of its volume.

[SECTION-B]

3 x 15 = 45

• Each question has a choice, attempt any of these choices.

1. What is Joule-Thomson Effect? Prove and Give Expression fore Joule Thomson Cooling?

OR

Describe Carnot Engine and give expression for its efficiency.

2. Give expression for change in entropy towards changing from Ice to steam. A efficient engine works b/w 2100K and 700K and its efficiency is 40%. The Value of its efficiency, What Percentage is possible for its Maximum Possible frequency.

OR

What is Mean free Path? Give expression for mean free Path, and show that it is inversly Perposnal to its Pressure.

3. Describe Maxwell-Boltzmann distribution Law for the distribution in energy states of molecules.

OR

Describe Bose-Einstein statistics and Write the difference b/w three statistics i.e. Maxwell-Boltzmann statistics, Bose-Einstein statistics and Fermi-Dirac statistics.

Heat & Thermodynamics

- **Definition :**

  Heat is defined as the amount of energy transfer from one body to another body or from one part of a body to other part of the body by virtue of temperature difference.

- **Important Points :**

  (a) When two bodies at different temperature are brought in contact the hotter body cools down and the cooler body warms up due to the transfer of heat from hotter body to cooler body.

  (b) 'Heat is energy in transit due to temp. difference between the body' When heat is transferred from one body to another body then after the transfer this heat becomes part of internal energy or is used for doing work.

- **Unit & Dimension :**

  SI Unit ⟶ Joule

  Dimension ⟶ $[ML^2T^{-2}]$

- **Specific Heat of Gas :**

  Types of specific Heat of Gas

  (a) Molar specific Heat : Unit Mass is taken as one mole.

  Units ⟶ J/mole-K

  (b) Gram specific Heat : Unit is taken as 1 Kg or 1 gms.

  Units ⟶ J/Kg-K or J/Kg-ms

$$C_{gram} = \frac{C_{molar}}{M}$$

- **Definition :**

  Amount of heat required to raise temp. of one unit amount (mass or molar) by one unit temperature through a given process is known as specific Heat of that Process.

$$C_{Process} = \left(\frac{dQ}{n\Delta T}\right)_{Process}$$

NOTE ; Thus any gas can have Infinite specific Heats depending on the Infinite-different Processes.

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} nC\,dT$$ Where C is a specific Heat for the Process through which temp. from T_1 to T_2.

NOTE ; C remains inside the Integral because it may be a variable i.e. C may be a function of temp. (direct or Indirect).

- Specific Heat at Constant Volume -

⇒ Represented as C_V

$$\Rightarrow C_V = \left[\frac{dQ}{n\,dT}\right]_{\text{cont. Volume}}$$

Its experimental Value is found to be very close $\frac{fR}{2}$ Thus

$$\Rightarrow C_V = \frac{fR}{2}$$

- Specific Heat at Constant Pressure -

⇒ Represented as C_P

$$\Rightarrow C_P = \left[\frac{dQ}{n\,dT}\right]_{\text{cont. Pressure}}$$

Its experimental Value is found to be almost equal to $\frac{(f+2)R}{2}$

$$\Rightarrow C_P = \frac{(f+2)R}{2}$$

- Adiabatic Exponent (γ) ;

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

$$\Rightarrow \gamma = 1 + \frac{2}{f}$$

$$\Rightarrow C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$$

First Law of Thermodynamics

Statement: $dQ = dU + dW$ (For zero Heat loss)

dQ = Heat supplied to the system

dU = Change in Internal energy

dW = Work done by the system.

* This Law is a form of energy Conservation.

The first Law of Thermodynamics (derivation)

Let us Introduce certain Amount of Heat energy dQ into a gas confined inside a cylinder fit with a Piston.

The Gas can either!

(I) Store energy as Random KE of its molecules (dU), or

(II) Use the energy to do work (dW) in the environment (Such as Raising a weight on the Piston).

Thus, the first law of thermodynamics can be written: $dQ = dU + dW$

Note! In solivng Thermodynamics Problems, always take gas as system.

- Sign Convention!
  - (I) Whenever heat is added to the system sign is +ve.
  - (II) Whenever heat is rejected the heat sign is -ve.

- Work (dW)!
  - (I) ($V\uparrow$) Sign is +ve.
  - (II) Sign is -ve ($V\downarrow$)

- Internal Energy (dU)!
  - (I) When temp. Increases sign is +ve.
  - (II) When temp decreases sign is -ve.

- Application of first Law of Thermodynamics!

ISOCHORIC PROCESS-

A process that takes Place at Constant Volume is called Isochoric Process or Isovolumetric Process (Gas will follow Gaylusac's Law)

(I) Conditions $\longrightarrow$ V is constant.

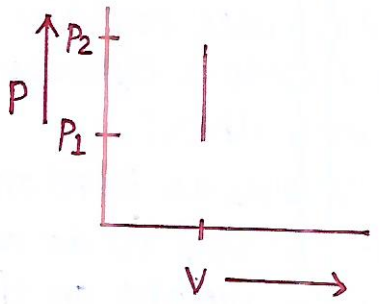
(II) Process equation $\longrightarrow \frac{P}{T}$ = Constant

(III) If Gas is taken from state A having P_1 Pressure, T_1 temp. and Volume V to state B having Pressure P_2, temperature T_2 and Volume V then

$$\underset{(P_1, V, T_1)}{A} \longrightarrow \underset{(P_2, V, T_2)}{B}$$

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$ [While PV=nRT will relate Variables in same state]

(IV) P-V Curve



(V) $dW = 0$ since $dV = 0$

(VI) $\Delta U = \frac{nfoR}{2}(T_2 - T_1)$

(VII) $\Delta Q = nC_V(T_2 - T_1)$

(VIII) Applying first Law of Thermodynamics

$$0 + \Delta U = \Delta Q$$

$$\Rightarrow n\left(\frac{fR}{2}\right)(T_2 - T_1) = nC_V(T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow C_V = \frac{fR}{2}$$

(IX) Bulk modulus $= -\frac{dP}{(dV/V)} = -\infty$

(X) Specific Heat $= C_V$

- **Isobaric Process :**

A Process that take place at Constant Pressure is called Isobaric Process (Gas will follow Charle's Law)

(I) Condition : P is constant

(II) Process Eqⁿ : $\frac{V}{T}$ is constant

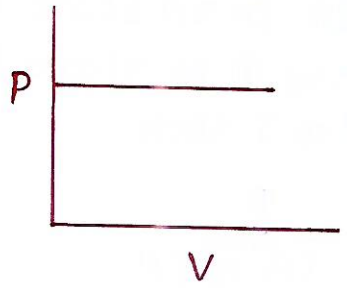
(III) If Gas is taken from state A having Pressure P, Temp T_1 and Volume V_1 to state B having Pressure P, temp. T_2 and Volume V_2 then

$$\underset{(P, V_1, T_1)}{A} \longrightarrow \underset{(P, V_2, T_2)}{B}$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$PV_1 = nRT_1$$
$$PV_2 = nRT_2$$

(IV) PV curve



(V) $\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = P(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$

(VI) $dU = nC_V\,dT$

$\Delta U = nC_V(T_2 - T_1)$

(VII) $dQ = nC_p\,dT$

$\Delta Q = nC_p(T_2 - T_1)$

(VIII) Applying First Law of Thermodynamics

$$nC_p(T_2 - T_1) = nC_V(T_2 - T_1) + nR(T_2 - T_1) \Rightarrow C_p - C_V = R$$

(Known as Mayer's Relation)

- **Characteristic Gas Constant :**

Gas constant expressed for Particular gas in terms of mass is known as charactristic Gas constant of that Particular Gas.

$$R_{characteristic} = \frac{R(\text{Universal Gas Constant})}{M(\text{mol. wt of Gas})}$$

Units $\longrightarrow$ J/gms-K or J/kg-K

(IX) Bulk modulus

$$B = -\frac{dp}{(dV/V)} = 0$$

(X) Specific Heat Capacity C_p

- **Isothermal Process :**

A Process that takes Place at Constant temperature is called Isothermal Process (Gas will follow Boyle's Law).

(I) Condition ⟶ Temp. is Constant

(II) Process eqn ⟶ PV = Constant

(III) If Gas is taken from state A having Pressure P_1, Volume V_1 and temperature T to state B having Pressure P_2, Volume V_2 and temperature T then



HEAT
THERMODYNAMICS AND STATISTICAL PHYSICS

1. Kinetic Theory of Matter

- Ideal Gas
- Behaviour of Real Gas
- Transport Phenomena of gas

- Heat is a form of energy.
- According to the Kinetic Theory of Matter, every substance (In form of solid, Liquid, Gas) consists of a very small particles called the molecules. The Molecules are the smallest Particles of a substance that can exist in free space.
- The velocity of the molecules increases with rise in temperature.



KtM ⇒ matter is made up of molecules
⇒ molecules are in rapid motion.
⇒ molecules experience forces of attraction b/t one another.

Three States of Matter-
1. Solid
2. Liquid
3. Gas

Solid ⟶ Liquid ⟶ Vapour ⟶ Gas

- Concept of Ideal and Perfect Gas -

$$PV = RT \quad \text{——} (i)$$

$$\left[\frac{dU}{dP}\right]_T = 0 \quad \text{——} (ii)$$

$$\left(\frac{dU}{dV}\right)_T = \left[\frac{dU}{dP}\right]_T \left[\frac{dP}{dV}\right]_T$$

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{RT}{V^2}$$

$$\frac{dP}{dV} = -\left[\frac{RT}{V}\right]\left[\frac{1}{V}\right] = -\frac{P}{V}$$

$$\left(\frac{dU}{dV}\right)_T = \left[\frac{dU}{dP}\right]_T \left[\frac{-P}{V}\right]_T$$

$$\left[\frac{dU}{dP}\right]_T = 0$$

$$\left[\frac{dU}{dV}\right]_T = 0$$

The internal energy of an Ideal Gas is a function of temperature only,

$$U(\text{Total}) = f(T)$$

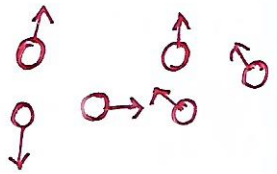
In a large number of Calculations, A real Gas can be taken approximately as an Ideal Gas. This involves an error that can be tolerated in the calculations

- Postulates for Kinetic Theory of Gases -

1. A gas is composed of small indivisiual particles called Molecules. The molecules of same gas are all alike but differ fromthe molecules of the other gas.
2. The distance between the molecules is large compared to that of a solid or liquid and hence the force of inter-molecules attaraction are negligible.
3. The size of the molecules is infinitesimally small as compared to the average distance traversed by a molecule b/w any two consecutive collisions.
4. The molecules are perfectly hard elastic spheres and the whole of their energy is Kinetic.

• Brownian Motion-

(i) The motion of each Particle is completely irregular and random. No two particles are found to execute the same motion.



(ii) The motion is continuous and take place for ever.

(iii) The smallest Particle appear to be more agitated the large one.

⇒ Makoto Kobayashi and Toshihide Masakawa have discovered that the Origin of the broken symmetry which Predicts the existence at least three families of quarks in nature.

(iv) The motion becomes more vailent on increasing the temperature.

(v) The motion is not modified due to the shaking of colloidal Solution.

(vi) The Brownian Mation cannot be observed with Particles of large size.

(vii) The laws of Kinetic Theory of gases are applicable to Brownian motion too.

• DEGREE OF FREEDOM-

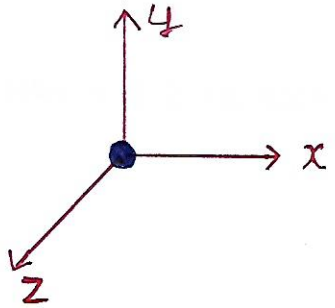
✡ Definition-

The total number of independent variables required to describe completely the state of motion of a body are called its degree of freedom.

An Ant moving along a straight line i.e., a wire, it has only one degree of freedom. If it moves on a plane, then it has two degree of freedom(x,y). A flying insect in air, say a mosquito has 3 degree of freedom (x,y,z). A rigid body, however, not only moves but also rotates about any axis Passing through itself. Hence it has 3 degree of freedom due to rotational Motion. Thus it has in all 6 degree of freedom.

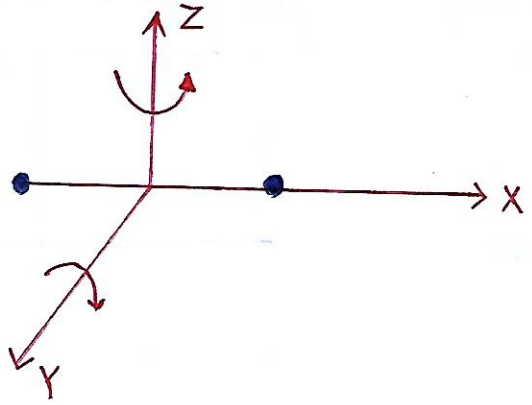
✡ Monoatomic Molecules-

A monoatomic molecule e.g. Neon(Ne), Helium(He) etc. has 3 degree of freedom (all are translational) as shown in figure.



✡ Diatomic Molecules-

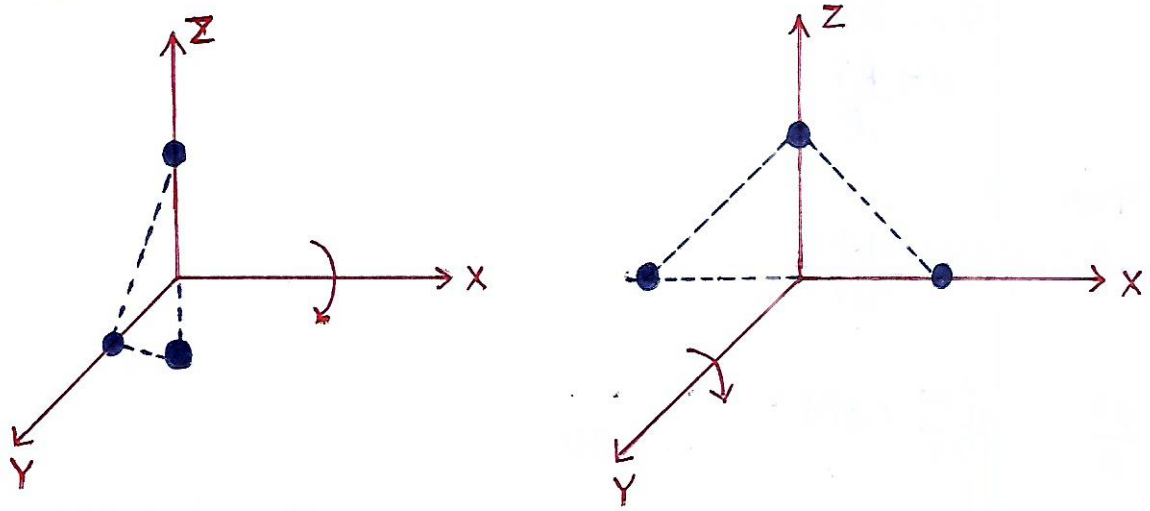
A diatomic molecule having a dumb-bell shape e.g. HCl, Cl_2, O_2, CO etc. has 5 degree of freedom (3 translational + 2 Rotational), as shown in the figure.



⇒ At high temperature, In addition to the translational and Rotational degree of freedom, the vibertional degree of freedom are also excited and in that case a diatomic molecule Possesses 7 degree of freedom.

✡ Triatomic Molecules-

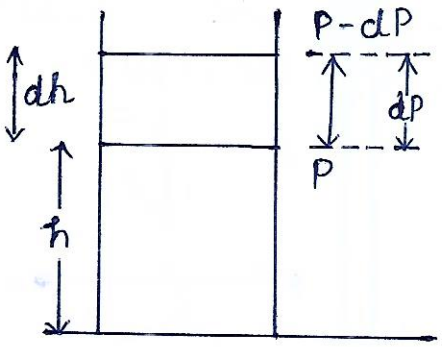
The other name of triatomic is Polyatomic molecules. A triatomic molecule, If it is non-linear e.g. H_2S, SO_2 etc. has 6 degree of freedom (3 translational + 3 Rotational). Figure show triatomic non-linear molecule.



⇒ A triatomic molecule, if it is linear e.g. CO_2, CH_2 has 5 degree of freedom similarly to diatomic molecule i.e. (3 translational + 2 Rotational).

• Change of Pressure with Height -

The Pressure of the atmosphere decreases with increase in height from sea level. The density of air is not the same at all levels.



Consider that the Pressure of air at a height $h = P$. For an increase in height dh, the decrease in Pressure is dP.

i.e. $dP = -(dh)\rho g$ .....(i)

Negative sign shows that the Pressure decreases with increase in height.

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Then

$$dP = -(dh)\frac{M}{V} \cdot g$$

But for a Perfect dry air

$$PV = RT$$

$$V = \frac{RT}{P}$$

Then

$$dP = -(dh)\frac{M \cdot Pg}{RT}$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{-Mg}{RT}(dh) \quad \text{.....(ii)}$$

$$\log P = \frac{-Mg}{RT}h + C \quad [C \text{ is constant after Integral}]$$

When $h = 0$

$P = P_0$

$C = \log P_0$

Substituting, we get

$$\log P = \frac{-Mg}{RT} h + \log P_0$$

$$\log \frac{P}{P_0} = \frac{-Mg}{RT} h \quad \ldots\ldots (iii)$$

$$P = P_0 e^{\frac{-Mg}{RT} h} \quad \ldots\ldots (iv)$$

Assuming that the lapse rate is α in the lower Portion of the atmosphere (Troposphere) ⇒ It is the region in which the temp. falls with increase in height from the ground.

$$T = T_0 - \alpha h$$

T_0 is temperature of ground.

subtituting this value in equation (ii)

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R} \cdot \frac{dh}{(T_0 - \alpha h)}$$

$$\log P = \frac{-Mg}{R} \cdot \frac{dh}{(T_0 - \alpha h)}$$

$$\log P = \frac{Mg}{R\alpha} \log (T_0 - \alpha h) + K \quad \ldots\ldots (v)$$

$h = 0$

$P = P_0$

$$\log P_0 = \frac{Mg}{R\alpha} \log (T_0) + K$$

$$K = \log P_0 - \frac{Mg}{R\alpha} \log T_0$$

substituting this value of K in eqn (5)

$$\log P = \frac{Mg}{R\alpha} \log (T_0 - \alpha h) + \log P_0 - \frac{Mg}{R\alpha} \log T_0$$

$$\log \frac{P}{P_0} = \frac{Mg}{R\alpha} \log \left(\frac{T_0 - \alpha h}{T_0} \right)$$

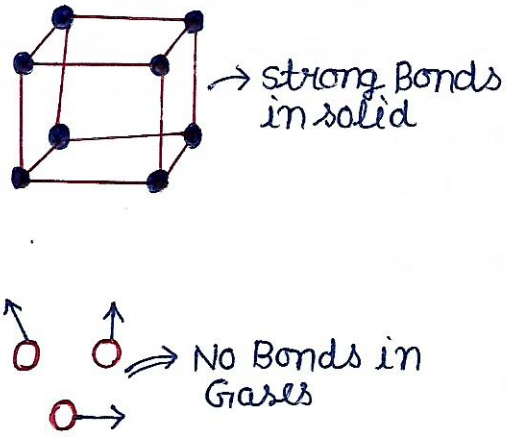
$$\boxed{P = P_0 e^{\frac{Mg}{R\alpha} \log \left(\frac{T_0 - \alpha h}{T_0} \right)}}$$

2. Behaviour of Real Gases

✡ An Ideal or Perfect gas is that which strictly obeys Boyle's law, Charles's Law as well as gas equation $PV = RT$ Under all conditions.

✡ No Gas is Perfect or Ideal in the true sense.

• Change of state -



* The molecules in a liquid have random motion. The average Kinetic energy of the molecules depends upon the temperature.

• Van der Walls Equation of state -

Ideal Gas Equation $PV = RT$

↓

Correction for Pressure
Correction for Volume

↓

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

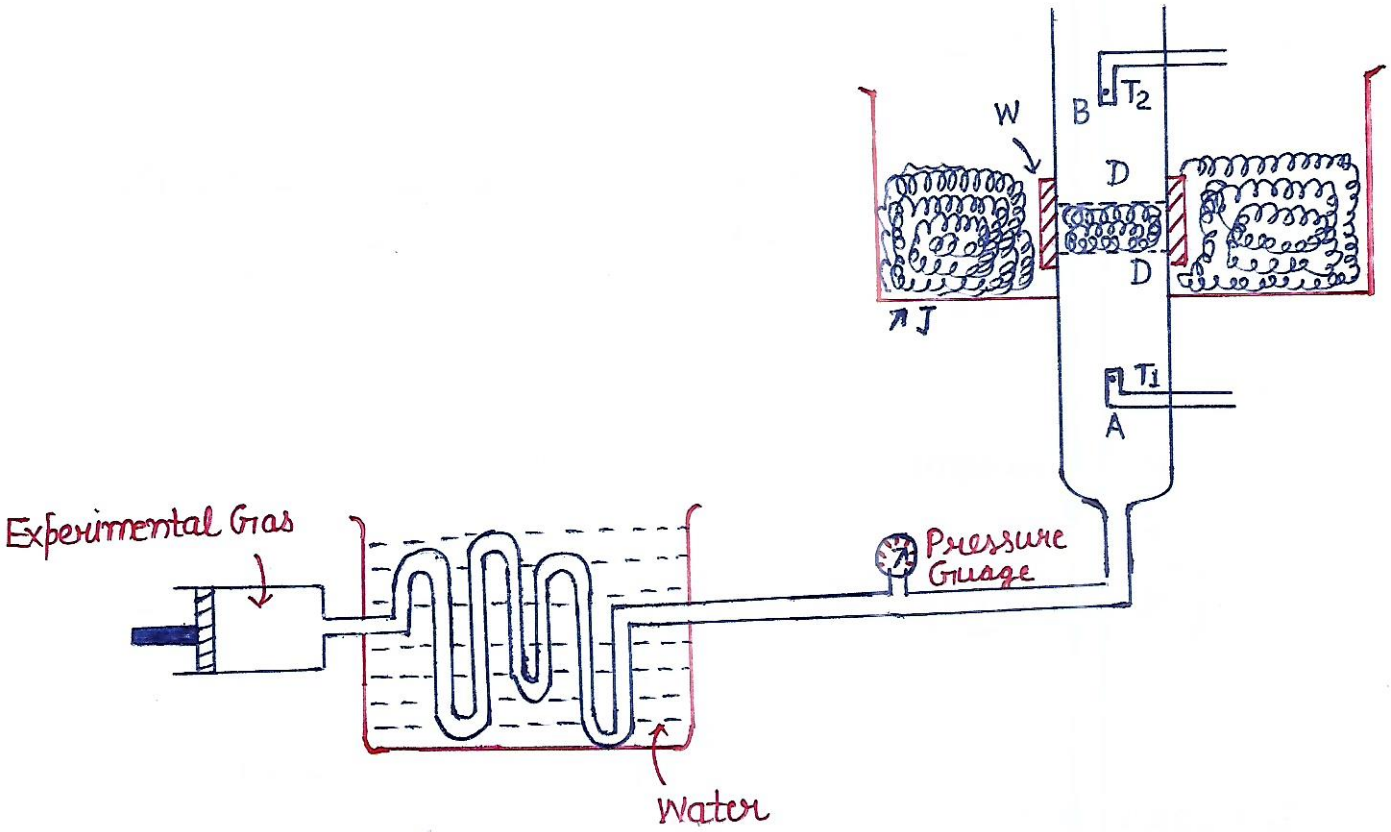
a, b are Vandar Walls constants.

• Joule-Thomson Effect-

If a gas Initially at a constant High Pressure is allowed to suffer throttle expansion through the Porous Plug of silk wool or cotton wool having a no. of fine Pores, to a region of constant lower Pressure adiabatically, a change of temperature of the gas (either cooling or heating) is obtained. This effect is called Joule-Thomson or Joule-Kelvin Effect

At ordinary temperature, all gases expect hydrogen show cooling effect on Passing through the Porous Plug, but hydrogen shows a heating effect. At Sufficiently low temperature all gases show a cooling effect.

• Joule-Thomson Porous Plug Experiment-



By Mean of the compression Pump P, the experimental gas is Passed slowly and Uniformly through the Porus Plug keeping the high Pressure constant, read by Pressure guage. During its Passage through the Porus Plug, the gas is throttled i.e. the saparation between the molecules increases. On Passing through the Porus Plug, the Volume of the gas increases against the atmospheric Pressure. As there is no loss or gain of heating during the whole Process, the expansion of the gas takes Place adiabatically

- The Properties of Gases are entirely different from Solid and liquid. Thermal expension is very large as compared to solid and liquids.
  - The shape of the gases are Uncertain.
  - The Intermolecular distance is very large in gases.
  - The Intermolecular force is very weak b/w two molecules of any gas.
  - The specific Heat is Infinite in gas.
  - The density of Gases is very small.

IMF-

Solid > liquid > Real Gas > Ideal Gas (Zero)

N_o = Avogardro Constant = 6.023×10^{23} molecules/mole

R = Universal Gas Constant = 8.31 J/mole-K

≈ 2 cal/mole-K [Dimns. = $ML^2T^2\mu^{-1}\theta^{-1}$]

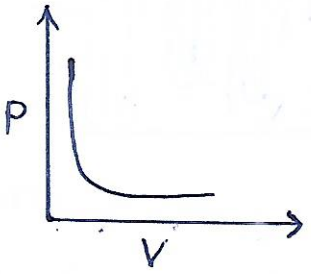
K = Boltzmann constant = $(K = R/N_o) = 1.38 \times 10^{-23}$ J/Kelvin

- Boyle's Law-

PV = constant

$V \propto 1/P$

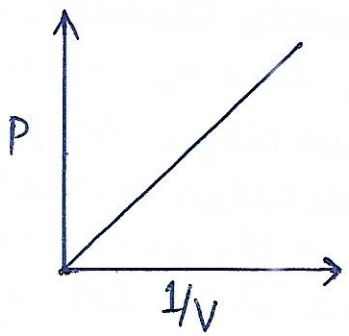
$\boxed{P_1V_1 = P_2V_2}$



Ideal Gas Equation-

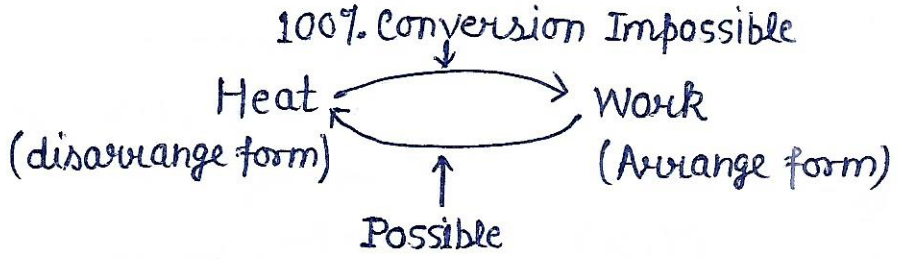
$\boxed{PV = nRT}$

But no gas is Ideal on Earth.



• FOUNDATION THERMO •

* Heat and Mechanical Work :



- Both are form of energy.
- First Conversion Practically given by Rumford.
- $W \propto H$ (heat) → Given by Joule

$$\boxed{W = JH}$$

Where J is mechanical equivalent of Heat or conversion constant.

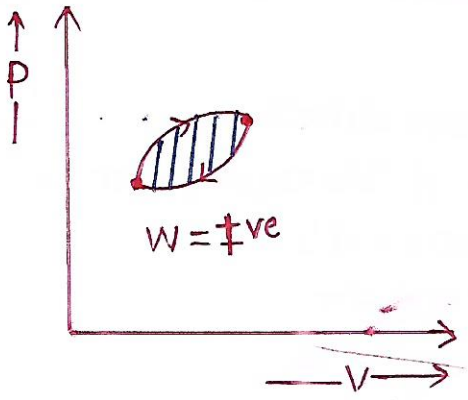
Heat $\rightleftharpoons$ Mechanical Energy

$$\boxed{1°F = \frac{9}{5}\ °C}$$

- Ice Point - 0°C
- Boiling Point or steam Point - 100°C

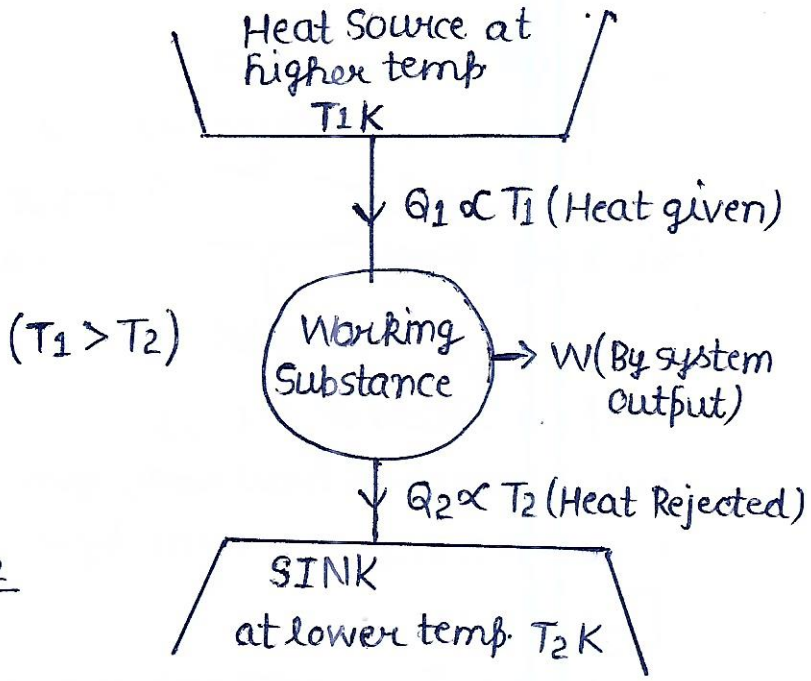
- **Thermodynamic system-**
  A system whose state is expressed in Parameter like Pressure (P), Volume (V), temp (T), Internal energy (U), Entropy (S) is called Thermodynamic system.

- **Cyclic Process-**



• Heat Engine-

- Heat Source at Temp. T_1 = Heat Reservior
- Working Substance
- Sink at low temp T_2 = Cold Reservior (Out Put)



$$Q_1 = Q_2 + W$$

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$\eta = \left(+1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right) \times 100\%$$

$$\eta = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \times 100\%$$

Carnot Engine

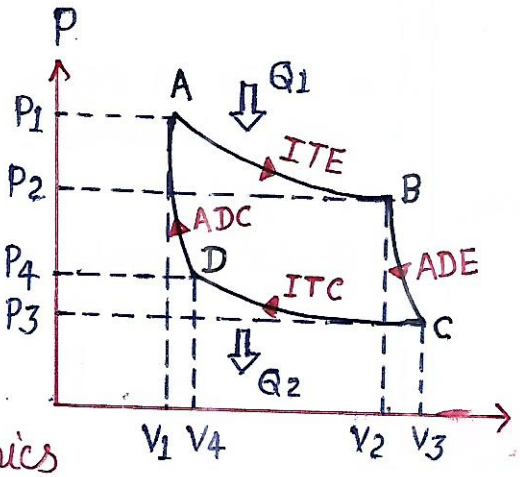
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

• Carnot Heat Engine-

☆ Its hypothetical Engine.

☆ It's efficiency is maximum.

☆ This cycle Process have two Isothermal and two adiabatic Process.



☆ In cyclic Process $dU = 0$

By first Law of Thermodynamics

$$dQ = dW + dU$$

$$dQ = 0 + dW$$

$$\Rightarrow dQ = dW$$

☆ In cyclic Process

$$\boxed{Q_{net} = W_{net}}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \times 100\%$$

• Carnot Refrigerator –

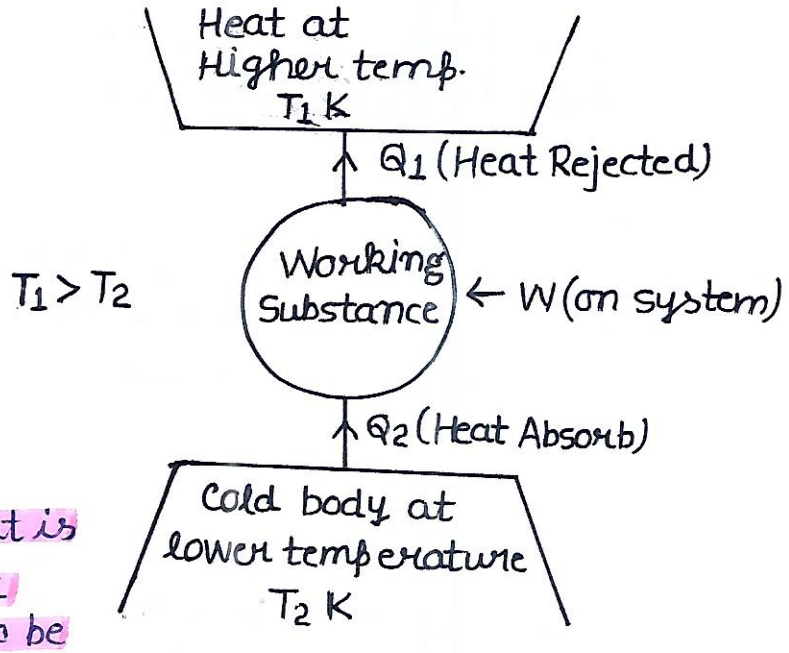
☆ Q_2 – Heat Absorb

☆ W → Input

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$Q_2 = Q_1 - W$$

$$\Rightarrow \boxed{W = Q_1 - Q_2}$$



☆ Refrigerator is just opposite to heat engine.

☆ In carnot Refrigerator, heat is absorbed from a cold body & some external work is to be done on refrigerator and the total heat is given out at higher temperature source.

• If the door of the Refrigerator is kept open in a room, it will make the room warm because heat engine that works in the backward direction i.e. it extracts heat from a low temp. reservior and transfer it to a high temp. reservion. Thus it exhausts more heat into the room than it extracts Hence the room will become warm.

⇒ Phase Conversions –

Solid $\xrightarrow{\text{melting}}$ liquid

Liquid $\xrightarrow{\text{Vaporisation}}$ Vapour

↓ boil

Hot body $\xrightarrow{\text{Vaporisation}}$ Vapor

• Zeroth Law of Thermodynamics –

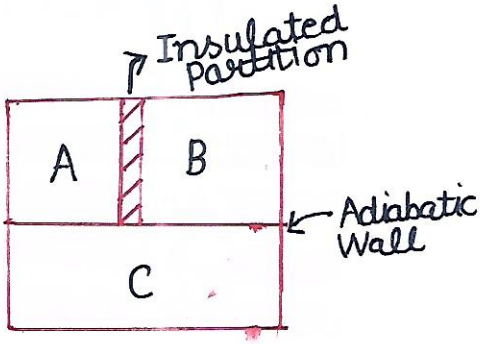
When a hot body A is brought in Thermal contact with a cold body B, heat flows from A to B and after some time the flows stops. The bodies are then said to be in thermal equilibrium with each other.

Statement-

The zeroth law of thermodynamics states that if two bodies A and B are each seprately in thermal equilibrium with a third body C, then A and B are also in thermal equilibrium with each other.

☆ Explanation-

We consider two system A and B insulated from each other but in good thermal contact with a common system C. System A and B will attain thermal equilibrium with third system. The Heat Capacity of body C must be zero.



Now if the Insulated Partition is removed and system A and B are brought into thermal contact, we find that there is no further change. This means that the system A and B are also in thermal equilibrium with another. This is known as zeroth Law of Thermodynamics.

☆ Heat is defined as energy in transit.

$$\frac{W}{Q} = J$$

$$\boxed{J = 4.186 \text{ J/cal}}$$

• First Law of Thermodynamics-

When a certain amount of heat Q is supplied to the system which does external work W in passing from state 1 to state 2, the amount of heat is equal to the sum of the increase in the internal energy of the system and the external work done by the system.

$$Q = (U_2 - U_1) + W \quad \text{——} \quad (1)$$

For a very small change in the state of the system, the law is expressed in the different form as

$$\delta Q = dU + \delta W \quad \text{——} (2)$$

WHERE δQ = is not perfect differential.
δW is also not perfect differential
dU is perfect diff

★Significance of First Law of Thermodynamics-

The first Law of thermodynamics is important because:

(i) It is applicable to any process by which a system undergoes a physical or chemical change.

(ii) It introduces the concept of internal energy.

★ Limitations-

The first Law of thermodynamics is based on the principle of conservation of energy of a system. Though it is applicable to every process in nature between the equilibrium states, it does not specify the condition under which a system can use its heat energy to produce a supply of mechanical work. It also does not say how much of the heat energy can be converted into work.

• Joule-Thomson Cooling -

As we know, in Joule-Thomson Porus-Plug experiment, if a gas at constant high Pressure is forced through a porus Plug to a region of constant low Pressure, the temp. of escaping gas changes. This is called Joule-Thomson effect.

Due to throttling, the gas suffers expansion. Although there is a pressure difference on two sides of the Porus Plug, the enthalpy H of the gas remains constant.

$$H = U + PV = \text{a constant}$$

$$dH = dU + PdV + VdP = 0 \quad \text{——— (iii)}$$

$$dQ = dU + PdV \quad [\because 1^{st} \text{ Law of Thermodynamics}] \text{-(i)}$$

$$dQ = TdS \quad [\because 2^{nd} \text{ Law of Thermodynamics}] \text{-(ii)}$$

Substituting the values from (i) & (ii) into eqn (iii)

$$dH = TdS - PdV + PdV + VdP = 0$$

$$dH = TdS - VdP = 0 \quad \text{——— (iv)}$$

$\because S = f(P,T)$

Then $$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP$$

Substituting in eqn (4)

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT + \left[T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T + V\right] dP = 0$$

Now $$C_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$$

Where C_P is specific Heat at constant Pressure.

$$C_P dT = -\left[T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T + V\right] dP$$

According to maxwell's fourth relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

$$C_P dT = \left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V\right] dP$$

$$\boxed{dT = \frac{1}{C_P}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V\right] dP}$$

For a very small change in the state of the system, the law is expressed in the different form as

$$\delta Q = dU + \delta W \quad \text{——} (2)$$

WHERE δQ = is not perfect differential.
δW is also not perfect differential
dU is perfect diff

★ Significance of First Law of Thermodynamics -

The first Law of thermodynamics is important because:

(i) It is applicable to any process by which a system undergoes a physical or chemical change.

(ii) It introduces the concept of internal energy.

★ Limitations -

The first Law of thermodynamics is based on the principle of conservation of energy of a system. Though it is applicable to every process in nature between the equilibrium states, it does not specify the condition under which a system can use its heat energy to produce a supply of mechanical work. It also does not say how much of the heat energy can be converted into work.

• Clapeyron's Latent Heat Equation Using maxwell's Thermodynamical Relations -

From Maxwell's second Thermodynamical Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

Multiplying by T, we get

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \qquad [\because T\partial S = \partial Q]$$

Here $\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_T$ represents the quantity of heat absorbed Per Unit increases in volume at constant temp. This quantity of heat absorbed at constant temperature is the Latent Heat (L).

Thus $\partial Q = L$

$\partial V = V_2 - V_1$

Then

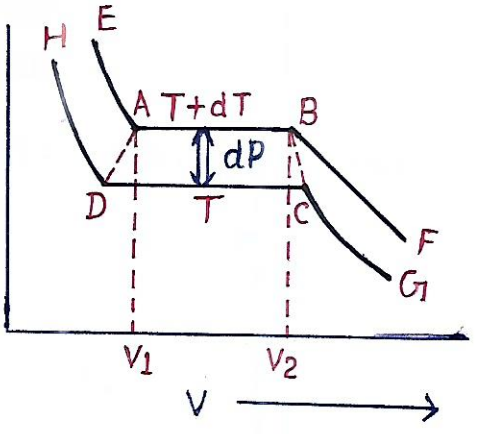
$$\frac{L}{V_2 - V_1} = T\frac{dP}{dT}$$

$$\boxed{\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}}$$

This is clapeyron's Latent Heat Equation.

• Clapeyron Latent Heat equation Using carnot's cycle -

Consider the isothermals FBAE at temperature T+dT and GCDH at temperature T. Here EA and HD show the liquid state of a substance. At A and D, the substance is Purely in the liquid state. From A to B and or D to C, the substance is in transition from the liquid to the gaseous state and vice versa. At (B to C) B and C, the substance is



Purely in the gaseous state. From B to F and C to G, the substance is in the gaseous state. Join A to D and B to C by dotted line.

This cycle ABCD represents a complete cycle and carnot Theorem can be applied. Suppose the volume at the Point A is V_1 and temperature is $T+dT$. The Pressure is just below its saturation Pressure and the liquid begins to evaporate and at state. Suppose the mass of the liquid at B is 1gms the amount of heat absorbed is Q_1, here $Q_1 = L+dL$, where $L+dL$ is the latent Heat of the liquid at temp. $T+dT$.

At the Point B, the Pressure is decreased by dP. The vapour will expand and its temperature falls. The temp. at C is T. At this Pressure and temp. T, the gas begins to condense and is converted into the liquid state.

At the Point D, the substance is in the liquid state. From C to D, the amount of Heat Rejected (given out) is Q_2. Here $Q_2 = L$ where L is latent Heat at temp. T. By increasing the pressure a little, the original Point A is restored. This cycle ABCDA is completly Reversible. Applying the principle of the carnot reversible cycle.

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_2} \quad \text{——— (i)}$$

Here $Q_1 = L+dL$

$Q_2 = L$

$T_1 = T+dT$

$T_2 = T$

Then substituting these values in eqn (i)

$$\frac{L+dL-L}{L} = \frac{T+dT-T}{T}$$

$$\frac{dL}{L} = \frac{dT}{T}$$

The area of the figure

$$ABCD = Q_1 - Q_2 = dL$$
$$= dP(V_2 - V_1)$$

Then

$$\frac{dP\,(V_2-V_1)}{L} = \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L(1)}{T(V_2-V_1)}$$

$$\boxed{\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_2-V_1)}}$$

This is called clapeyron's Latent Heat equation.